

**Boris Pardon**

# Numerische Phasenrekonstruktion aus Intensitätsmessungen

**Diplomarbeit**

# BEI GRIN MACHT SICH IHR WISSEN BEZAHLT



- Wir veröffentlichen Ihre Hausarbeit, Bachelor- und Masterarbeit
- Ihr eigenes eBook und Buch - weltweit in allen wichtigen Shops
- Verdienen Sie an jedem Verkauf

Jetzt bei [www.GRIN.com](http://www.GRIN.com) hochladen  
und kostenlos publizieren



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Hinweise zur Notation</b>	<b>4</b>
2.1	Besondere Schreibweisen . . . . .	4
2.2	Abkürzungen (in Auswahl) . . . . .	5
2.3	Symbole (in Auswahl) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Spezielle Integraltransformationen</b>	<b>6</b>
3.1	Gebrochene Fouriertransformationen . . . . .	6
3.2	Radontransformation und ihre Umkehrung . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Optik</b>	<b>12</b>
4.1	Geometrische Optik . . . . .	12
4.2	Wellenoptik und Numerische Propagation . . . . .	15
4.3	Verbindung zur Quantenmechanik und Hydrodynamik . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Wignerverteilung</b>	<b>22</b>
5.1	Definition der WV . . . . .	22
5.2	WV als Intensitätsdichte . . . . .	25
5.3	Propagation der WV . . . . .	26
5.4	Messung eindimensionaler WV . . . . .	28
5.5	Messung vierdimensionaler WV . . . . .	31
5.6	Kohärenzmaße . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Definition der Phase</b>	<b>34</b>
<b>7</b>	<b>Phasenmessung durch Interferometrie</b>	<b>36</b>
<b>8</b>	<b>Phasenmessung durch Intensitätspropagation</b>	<b>38</b>

8.1	Hin- und Herpropagation nach Fienup . . . . .	38
8.2	Regelflächenmethode nach EPPICH . . . . .	43
8.3	Fouriermethode nach NUGENT . . . . .	47
<b>9</b>	<b>Messungen und Ergebnisse</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Fazit</b>	<b>61</b>
<b>11</b>	<b>Danksagung</b>	<b>62</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>63</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>67</b>

# Kapitel 1

## Zielsetzung

Zur Phaseninformation von Licht:

In der Biologie und Medizin spielt die Phasenmikroskopie eine wichtige Rolle. Zum einen sind die meisten Zellen farblos und bieten unter dem normalen Amplitudenmikroskop nur wenig Kontrast. Zum andern erlaubt die Verteilung der optischen Dichte Rückschlüsse auf den physiologischen Zustand der Zelle; so nimmt die optische Dichte von Hefezellen kurz vor der Knospung zu (vgl. BEUTHAN *et al.* 1998). In der technischen Anwendung eignet sie sich zur Charakterisierung optischer Elemente, im speziellen zur Justierung von Laser-Resonatoren.

Es gibt sogar Hinweise darauf, daß Phasenmuster anders als Amplitudenmuster nicht der Abbeschen Bedingung gehorchen, nach der die Auflösung eines Mikroskops nicht genauer als die Wellenlänge sein kann (vgl. TYCHINSKIJ 1989 bis 1997).

Bislang wurde diese Phaseninformation durch Interferometrie erhalten, was einen relativ hohen experimentellen Aufwand bedeutete. Doch auch aus den Intensitätsverteilungen, die man in verschiedenen Ebenen aufnimmt, läßt sich unter geringerem experimentellem, aber größerem numerischen Aufwand diese Phaseninformation ermitteln.

In dieser Arbeit möchte ich einige Methoden zur Rekonstruktion von Phaseninformation aus Intensitätsmessungen, die im Laufe der letzten Jahre entwickelt wurden, und die Ergebnisse, die ich mit ihnen erzielen konnte, vorstellen.

## Kapitel 2

# Hinweise zur Notation

### 2.1 Besondere Schreibweisen

**Mehrkomponentige Größen** (Vektoren, n-Tupel) werden nicht immer mit dem Vektorpfeil bezeichnet:

$$x = (x_1, x_2, \dots) \text{ neben } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \quad (2.1)$$

Eine **Transformation**  $T$  führt eine Funktion  $f$  in ihre Transformierte  $Tf$  über. Der Deutlichkeit halber schreibe ich mitunter die eliminierten Variablen unter und neu eingeführte Variablen über das Transformationssymbol.

$$f = f(x) \quad \text{und} \quad Tf = (Tf)(y) \quad \Rightarrow \quad Tf = \overset{y}{T} \circ f = T_x^y \circ f \quad (2.2)$$

**Koordinatentransformationen** lassen sich damit in folgender Form schreiben, hier am Beispiel des Übergangs von kartesischen Koordinaten  $x, y$  in Polarkoordinaten  $\rho, \varphi$ :

$$\tilde{f}(\rho, \varphi) = \begin{bmatrix} \rho := \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi := \arctan(y, x) \end{bmatrix} \circ f(x, y) = \begin{matrix} \rho \\ \uparrow \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix} \circ \begin{matrix} \varphi \\ \uparrow \\ \arctan(x, y) \end{matrix} \circ f(x, y) =: \begin{matrix} \rho\varphi \\ \uparrow \\ \vec{x} \end{matrix} \circ f(x, y) \quad (2.3)$$

Ein Integralzeichen  $\int$  ohne Grenzen bedeutet die **uneigentliche Integration** über den gesamten Definitionsbereich. Ein Integralzeichen  $\int^x$  mit nur einer oberen Grenze liefert das **unbestimmte Integral**, also die Stammfunktion.

$$\int := \int_{-\infty}^{+\infty} \quad \text{vs.} \quad \int^x dx := \int_{x_0}^x d\tilde{x} \quad (2.4)$$

Zum vereinfachten Verständnis der Rekonstruktion der Wignerverteilung ab Kapitel 5 soll noch eine besondere Schreibweise eingeführt werden. Betrachten wir einen Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  und eine Drehung  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um einen gewissen Winkel  $\varphi$ . Mit  $R\vec{x}$  erhalten wir den um  $\varphi$  gedrehten Vektor  $\vec{x}$ .

Betrachten wir nun eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie beschreibt eine Fläche über der  $x$ - $y$ -Ebene. Diese Fläche wollen wir nun ähnlich wie den Vektor  $\vec{x}$  um jenen Winkel  $\varphi$  drehen; die so entstandene gedrehte Fläche soll mit  $Rf$  bezeichnet werden. Dies führt uns auf die Definition

$$Rf(\vec{x}) := \frac{1}{\det R} \cdot f(R^{-1}\vec{x}), \quad (2.5)$$

die so auf alle linearen Abbildungen  $R$  anwendbar ist.

Spitze Klammern geben den **Erwartungswert** (Mittelwert, Moment) einer Größe  $A$  bezüglich einer reellen, aber nicht notwendig positiven Verteilung  $f(x)$ :

$$\langle A \rangle_f := \frac{\int Af \, dx}{\int f \, dx} \quad (2.6)$$

Literaturzitate werden in Kapitälchen gesetzt.

## 2.2 Abkürzungen (in Auswahl)

FT	Fourier-Transformation	WV	Wignerverteilung
pWV	projizierte Wignerverteilung		

## 2.3 Symbole (in Auswahl)

$\delta(x)$	Diracsche Delta-Funktion	$\mathcal{R}$	Radon-Transformation
$\delta x$	relative Änderung	$R$	Drehung
$h$	Wignerverteilung	$RL$	Rayleigh-Länge
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation	$S$	Systemmatrix der geometrischen Optik
$k$	Wellenzahl ( $2\pi/\lambda$ )	$u, v$	Divergenzwinkel
$L, z$	optische Achse	$x, y$	transversale Ortskoordinaten
$\lambda$	Wellenlänge		
$P$	Propagation		

## Kapitel 3

# Spezielle Integraltransformationen

### 3.1 Gebrochene Fouriertransformationen

NAMIAS schlug 1980 eine Erweiterung der FT vor, die auch unvollständige Übergänge zwischen Orts- und Frequenzraum darstellen sollte, und nannte sie *fractional order fourier transform*. Ebenso geht ein Strahlungsfeld beim Übergang vom Nah- und zum Fernfeld allmählich in seine FT über (also durch Propagation oder in der Brennebene einer Linse, vgl. z. B. FURTAK 1988). Wie wir noch sehen werden, entsprechen diese Zwischenstufen einer Drehung der Wignerverteilung während der freien Ausbreitung.

Seiner mathematischen Eleganz und dem völlig neuen Verständnis der Propagation wegen sei NAMIAS' Argumentation hier grob wiedergegeben:

Erinnert sei an die Definition der FT, wobei hier bereits der suggestive Exponent  $\pi/2 = 90^\circ$  angefügt sei:

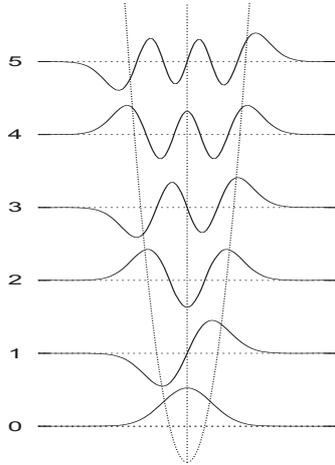
$$\mathcal{F}^{\pm\pi/2} f := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{\pm ikx} dx \quad (3.1)$$

Sie ist **zyklisch** vom Grade vier. Wendet man sie viermal hintereinander an, erhält man wieder die ursprüngliche Funktion. Ebenso steht man wieder wie vorher, wenn man sich viermal um  $90^\circ$  dreht.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{90^\circ}} & \tilde{f}(-x) \\ \mathcal{F}^{90^\circ} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}^{90^\circ} \\ \tilde{f}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}^{90^\circ}} & f(-x) \end{array} \quad (3.2)$$

Ihre Eigenfunktionen erweisen sich nach ACHIESER (1981:107) als die Gauß-Hermite-Moden

$$\mathcal{F}^{\pm\pi/2} GH_n = i^{\pm n} \cdot GH_n. \quad (3.3)$$



**Abb. 3.1.** Die Gauß-Hermite-Moden  $GH_n(\xi)$  sind die Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators  $u'' + (\epsilon - \xi^2)u = 0$  und ergeben sich mit dem Erzeugungsoperator  $A^\dagger = (\xi - d/d\xi)/\sqrt{2}$  zu  $GH_n = (n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n e^{-\xi^2/2}$ . Umformung und Normierung ergibt die einfache Form

$$GH_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}. \quad (3.4)$$

Vergleiche hierzu z. B. HAKEN/WOLF (1996, S. 146ff.). Sie bestehen aus der Gauß-Kurve  $G = e^{-x^2/2}$  und den Hermite-Polynomen, die der hermiteschen Differentialgleichung  $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$  genügen.

Die Eigenwerte  $i^{\pm n}$  lassen sich auch in der Form  $e^{in\pi/2}$  schreiben. Wir suchen nun einen Operator  $\mathcal{F}^\alpha$ , die die verallgemeinerte Eigenwertgleichung erfüllt:

$$\mathcal{F}^\alpha GH_n = e^{in\alpha} \cdot GH_n \quad (3.5)$$

Wir machen nun den Ansatz  $\mathcal{F}^\alpha = e^{i\alpha A}$ , setzen dies ein und differenzieren nach  $\alpha$ . Lassen wir nun  $\alpha$  verschwinden, erhalten wir die Eigenwertgleichung  $AH_n = nH_n$ . Aus ihr läßt sich mit Hilfe der hermiteschen Differentialgleichung  $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n$  der Operator  $A$  bestimmen:

$$A = -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right) \quad (3.6)$$

Dies ergibt die gebrochene FT in der Darstellung als Differentialoperator:

$$\boxed{\mathcal{F}^\alpha = \exp \left[ -\frac{i\alpha}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right) \right]} \quad (3.7)$$

Statt des Winkels  $\alpha$  kann man auch von der Ordnung  $\alpha/90^\circ$  sprechen (daher die Bezeichnung *fractional order FT*).

Diese Form ist nicht sehr praktisch für konkrete Rechnungen. Wir entwickeln daher die zu transformierende Funktion  $f$  einfach nach den Gauß-Hermite-Moden:

$$f(x) = |GH_n\rangle \langle GH_n|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} GH_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} GH_n^*(x') f(x') dx' \quad (3.8)$$

Die gebrochene FT lautet dann mit Summation über  $n$  schlicht:

$$\boxed{\mathcal{F}^\alpha f = e^{in\alpha} \cdot |GH_n\rangle \langle GH_n|f\rangle} \quad (3.9)$$

Unter Beachtung der Mehlerschen Formel (vgl. MORSE *et al.* 1953) für die bzgl.  $e^{-x^2}$  orthonormalisierten Hermite-Polynome

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha} \cdot H_n(x)H_n(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2i\alpha}}} \exp \left( \frac{2xk \cdot e^{2i\alpha} - (x^2 + k^2) \cdot e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} \right) \quad (3.10)$$

erhält man die Integraldarstellung der gebrochenen FT:

$$\mathcal{F}^\alpha f(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2i\alpha}}} \cdot \int \exp\left(\frac{2xk \cdot e^{2i\alpha} - (x^2 + k^2) \cdot e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + k^2}{2}\right) \cdot f(x) dx \quad (3.11)$$

Umgeformt gibt dies:

$$\mathcal{F}^\alpha f = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\alpha}{2} - \frac{i \cot \alpha x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \int \exp\left(\frac{ix\tilde{x}}{\sin \alpha} - \frac{i}{2} \cot \alpha \tilde{x}^2\right) \cdot f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (3.12)$$

Wie man sich leicht überzeugt, geht dies für  $\alpha \rightarrow 0, \pi/2$  in die Identität<sup>1</sup> bzw. die herkömmliche FT über.

Für die gebrochene FT lassen sich wie bei der normalen FT eine Reihe von Rechenregeln aufstellen; hier sei auf die Originalarbeit NAMIAS<sup>1</sup> verwiesen.

Aus (3.7) oder der Linearität des Skalarproduktes in (3.9) ergibt sich, daß sich bei der Verknüpfung zweier gebrochener FT die Winkel addieren:

$$\mathcal{F}^\alpha \mathcal{F}^\beta = \mathcal{F}^{\alpha+\beta}. \quad (3.13)$$

Dies ergibt sich auch aus der Überlegung, daß die gebrochene FT die Propagation des Lichtes im Raume beschreibt. Hierbei muß allerdings das Zerlaufen des Wellenpaketes beachtet werden. Das Strahlungsfeld geht ja erst im Unendlichen in seine FT über, die unendlich gestreckt ist. Statt der Ortskoordinate des Nahfeldes ist im Fernfeld der Dviergenzwinkel  $u = x/L$  zu verwenden. Der Propagationswinkel (also der Exponent der gebrochenen FT)<sup>2</sup>  $\alpha$  ist proportional zum Tangens der Propagationsweite  $\tan L$ . Propagationswinkel und -skalierung werden sich in Kapitel 5.4 aus der ABCD-Matrix der geometrischen Optik ergeben.

Detaillierte Überlegungen zur Anwendung der gebrochenen FT für die numerische Propagation von Strahlungsfeldern unter Berücksichtigung der Aufweitung finden sich in LOHMANN/MENDLOVIC (1992), LOHMANN (1993), PELLAT-FINET (1994), MCALISTER *et al.* (1995) und OZAKTAS/MENDLOVIC (1995).

Doch schon jetzt verstehen wir, daß der Resonator eines Lasers, wenn er von parabolischen (näherungsweise natürlich auch sphärischen) Spiegeln<sup>3</sup> begrenzt ist, einer sich ausbreitenden Wellenfunktion das parabolische Potential eines (quantenmechanischen) harmonischen Oszillators bietet - dessen Eigenfunktionen (eben die Gauß-Hermite) sind hinlänglich bekannt.

<sup>1</sup>Bedenke, daß  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi i \epsilon}} \exp\left(\frac{-x^2}{i\epsilon}\right) = \delta(x)$ .

<sup>2</sup>Jede Drehung  $R^\alpha$  läßt sich als Potenz einer „Einheitsdrehung“  $R := R^1$  interpretieren.

<sup>3</sup>Zur Verbindung von Brechungsindex und quantenmechanischem Potential vgl. S. 21.

Diese Eigenfunktionen des Resonators - nach entsprechender Reskalierung - stellen aber auch Eigenfunktionen der Propagation dar. Ein Strahl von der Form einer solchen Eigenfunktion wird seine Form niemals ändern, sondern lediglich aufweiten. Die Aufweitung ist für alle Eigenfunktionen gleich, nur der wegabhängige Phasenfaktor variiert verschieden stark. Damit ließe sich der Algorithmus zur numerischen Propagation eines in Amplitude und Phase gegebenen Feldes einfach durch Entwicklung nach diesen Eigenfunktionen und Änderung der Phasen der einzelnen Gauß-Hermite-Koeffizienten bewerkstelligen. Hierzu muß die Grundmode-Breite willkürlich festgelegt werden; von dieser hängt aber stark ab, wie schnell die Entwicklung nach den Eigenfunktionen konvergiert.

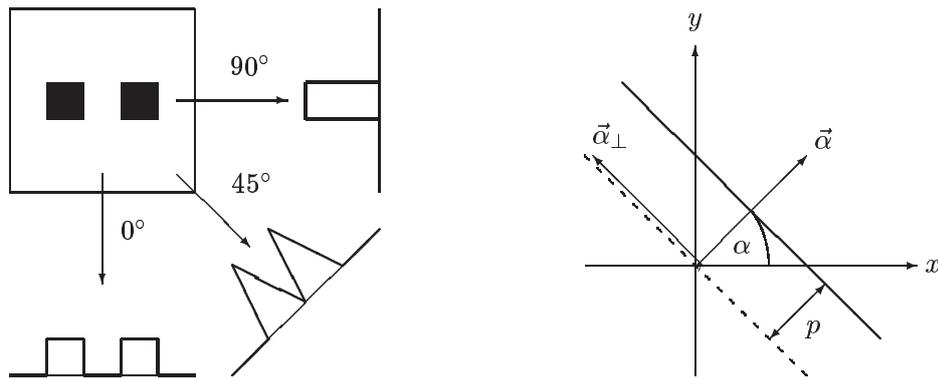


Abb. 3.2. Links wurde die Radontransformation zu  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  durchgeführt, rechts ist der Integrationsweg zu  $(\alpha, p)$  gezeigt.

### 3.2 Radontransformation und ihre Umkehrung

Die Radontransformation ( $\approx$  Tomographie, Durchleuchtung) und ihr Inverses wurde 1917 von RADON vorgestellt. Sie wird uns später die Rekonstruktion der Wignerverteilung aus den Intensitätsmessungen ermöglichen. Zunächst soll sie jedoch am Beispiel der Computertomographie (CT) erläutern, bei der sie seit langem erfolgreich angewandt wird. Die CT erlaubt eine Rekonstruktion der inneren Struktur eines Körpers mittels Durchleuchtung. Man wählt eine Ebene  $(x, y)$  und auf ihr einen Integrationsweg, der durch Normale  $\vec{\alpha}$  und Ursprungsabstand  $p$  bestimmt ist (vgl. Abb. 3.2). Schickt man nun einen Röntgenstrahl diesen Integrationsweg entlang, so ergibt sich bei einem Absorptionskoeffizienten  $\epsilon(x, y)$  die Intensitätsabschwächung  $I'/I$  mit  $\vec{x} := (x, y)$  zu

$$\log \frac{I'}{I} = \int_{\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = p} \epsilon(\vec{x}) \, ds := \mathcal{R}_{x,y}^{\alpha,p} \epsilon. \quad (3.14)$$

Mißt man die Intensitätsabschwächung nun für einen Satz von Winkeln  $\alpha_i$  und Ursprungsabständen  $p_j$ , so erhält man die Radontransformierte  $\mathcal{R}\epsilon(\alpha, p)$ . Mit der inversen Radontransformation läßt sich der Absorptionskoeffizient orts aufgelöst ermitteln, und man erhält die innere Struktur des Objekts.

Die allgemeine Definition der Radontransformierten einer Funktion  $f(x, y)$  lautet mit Normalen  $\vec{\alpha} := (\cos \alpha, \sin \alpha)$  und Parallelen  $\vec{\alpha}_\perp := (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ :

$$\mathcal{R}_{x,y}^{\alpha,p} f(x, y) := \int_{\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = p} f(\vec{x}) \, ds = \int f(p\vec{\alpha} + s\vec{\alpha}_\perp) \, ds. \quad (3.15)$$

Mit der Drehung

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

läßt sich diese Definition auch wie folgt darstellen:

$$\boxed{\mathcal{R}_{x,y}^{\alpha,x} := \int R^{-\alpha} f(x, y) \, dx = \int f \left[ R^\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \, dx} \quad (3.17)$$

Eine mögliche Inversionsformel stellt das **Fourier-Slice-Theorem** dar (vgl. BERENSTEIN 1998):

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x,y & \vec{x} & \tau\vec{\alpha} & \tau \\ \alpha,p & \tau\vec{\alpha} & \tau,\alpha & p \end{array} \\ \mathcal{F}^{-1} \circ \uparrow \circ \mathcal{F} \end{array}, \quad (3.18)$$

denn die Fouriertransformation über die Abstandskoordinate der Radontransformierten liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p \circ \mathcal{R}_{\alpha,p} \circ f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int e^{-i\tau p} \cdot f(\underbrace{p\vec{\alpha} + s\vec{\alpha}_\perp}_{=\vec{x}}) \underbrace{dsdp}_{=dxdy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int e^{-\tau(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})} \cdot f(\vec{x}) \, dxdy = \mathcal{F}_{\vec{x}}^{\tau\vec{\alpha}} \circ f(x,y), \end{aligned} \quad (3.19)$$

und damit folgt die Anwendbarkeit der Inversionsformel (3.18) gemäß

$$\begin{pmatrix} \vec{x} & \tau \\ \mathcal{F} & \mathcal{F} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x,y \\ \mathcal{R} \\ \alpha,p \end{pmatrix} \cdot f(x,y) = \mathcal{F}_{\tau\vec{\alpha}}^{\vec{x}} \circ \mathcal{F}_{\vec{x}}^{\tau\vec{\alpha}} \circ f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (3.20)$$

Hierbei steht „Slice“ für die Ursprungsgeraden, die beim Übergang von Polar- zu kartesischen Koordinaten  $(\tau, \alpha) \rightarrow \tau\vec{\alpha} = (\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha)$  Isokline (Gleichwinkel) darstellen. Daneben existieren noch zahlreiche andere Methoden der inversen Radontransformation (z. B. *back projection*), in aller Ausführlichkeit bei TOFT (1996), kürzer bei BERENSTEIN (1998) beschrieben. Das Fourier-Slice-Theorem ist jedoch für die Rekonstruktion der Wignerverteilung besonders interessant, da die Zwischenschritte als Ambiguität und Kohärenz physikalische Bedeutung haben (vgl. das Rekonstruktionsschema in Abb. 5.4 auf S. 29).

## Kapitel 4

# Optik

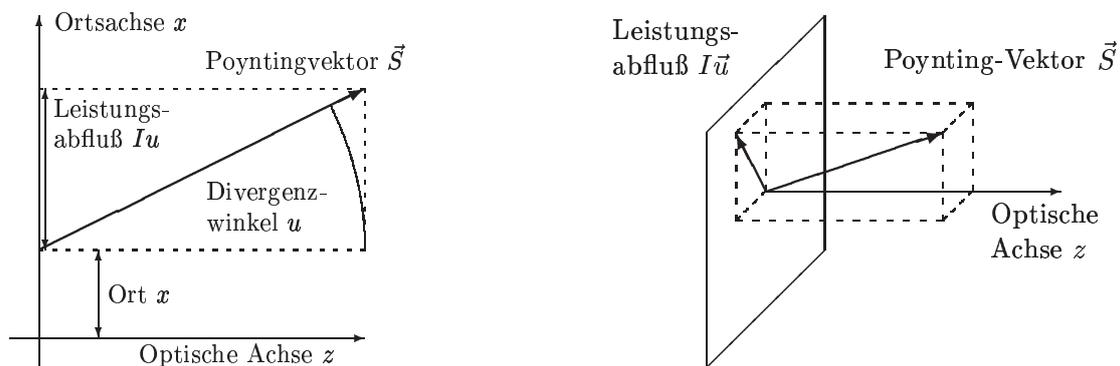
### 4.1 Geometrische Optik

Die wichtigsten Begriffe und Erkenntnisse der geometrischen Optiken sollen im folgenden noch einmal kurz zusammengefaßt werden:

Ein einzelner **Strahl** ist – anders als in der Wellenoptik – eine Linie im Raume, bei freier Ausbreitung eine Gerade. In einer Transversalebene ist er durch die Lage  $x$  und den **Abstrahlwinkel** (auch Abstrahlrichtung, Divergenzwinkel)  $\tan u = dx/dz$  definiert. Damit läßt er sich im **Phasenraum** als Punkt  $(x, u)$  darstellen. Der mit der Intensität gewichtete Abstrahlwinkel  $Iu$  heißt **transversaler Poynting-Vektor** oder **Leistungsabfluß**.

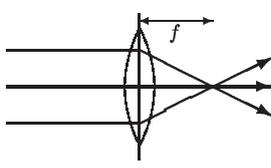
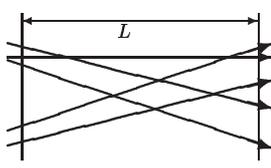
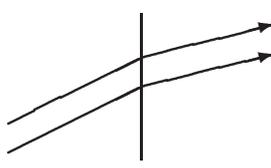
Zentral ist hierbei die **paraxiale Näherung** für achsnahe (par-axiale) Strahlen, namentlich die Gleichsetzung von Winkel  $u$  und Steigung  $\tan u$ , die von grundlegender Bedeutung für die gesamte Optik ist und in allen nachfolgenden Ausführungen auch über Wellenoptik stillschweigend vorausgesetzt wird:

$$u \approx \tan u \approx \sin u \quad (4.1)$$



**Abb. 4.1.** Zur Definition von Ort  $x$  und Winkel  $u$  eines Lichtstrahls der geometrischen Optik.

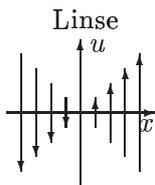
Tabelle 4.1. elementare ABCD-Systeme

<p>Linse</p>  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 0 \end{pmatrix}$	<p>freie Ausbreitung</p>  $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Brechung</p>  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta n \end{pmatrix}$
--	---	---

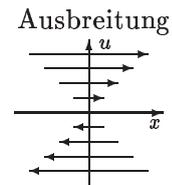
Die Ausbreitung eines Strahls durch einfache optische Elemente lässt sich mit der **Systemmatrix**  $S$  darstellen.

$$\begin{pmatrix} x' \\ u' \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Optische Elemente, für die dies möglich ist, heißen **ABCD-Systeme**. Die grundlegenden sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.



Man mache sich die Wirkung dieser Elemente auf den Phasenraum klar: Bei der freien Ausbreitung wird parallel zur Ortsachse verschoben, und zwar um eine Strecke proportional zum Abstände von ihr. Bei der Linse geschieht gleiches bezüglich der Winkelachse.



Die Systemmatrix eines optischen Systems, das aus den elementaren optischen Elementen zusammengesetzt ist, ergibt sich durch Multiplikation derer Matrizen.

$$\rightarrow \boxed{S_1} \rightarrow \boxed{S_2} \rightarrow \boxed{S_3} \rightarrow \text{entspricht} \rightarrow \boxed{S_{123} = S_3 \cdot S_2 \cdot S_1} \rightarrow \tag{4.3}$$

Die Erweiterung auf zwei transversale Ortsdimensionen  $x$  und  $y$  geschieht im **stigmatischen** Falle sehr einfach: Das optische System ist **rotationssymmetrisch**; beide Phasenraumdarstellungen  $(x, u)$  und  $(y, v)$  breiten sich getrennt mittels derselben Systemmatrix aus. Anders ausdrückt, lässt sich die Systemmatrix  $S$ , die auf die Vierervektoren  $(x, y, u, v)$  wirkt, nach den beiden Ortsdimensionen separieren:

$$S = S_x \cdot S_y = \begin{pmatrix} A & - & B & - \\ - & 1 & - & - \\ C & - & D & - \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & - & - & - \\ - & A & - & B \\ - & - & 1 & - \\ - & C & - & D \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Diese Separierbarkeit taucht ebenso bei der Propagation mittels Integralen in der Wellenoptik auf (vgl. (4.15) auf S. 16) und wird uns beim Verständnis der projizierten Wignerverteilungen helfen. Wir wollen uns im folgenden auf solche stigmatische, rotationssymmetrische Systeme beschränken.

stigmatisch	einfach-astigmatisch	allgemein-astigmatisch
$\begin{pmatrix} A & - & B & - \\ - & A & - & B \\ C & - & C & - \\ - & C & - & C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_x & - & B_x & - \\ - & A_y & - & B_y \\ C_x & - & D_x & - \\ - & C_y & - & D_y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & B_{xx} & B_{xy} \\ A_{yz} & A_{yy} & B_{yx} & B_{yy} \\ C_{xx} & C_{xy} & D_{xx} & D_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} & D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix}$

**Tabelle 4.2.** Form der Systemmatrizen unterschiedlichen Stigmatismus.

Im **einfach-astigmatischen** Falle dagegen besitzt jede Transversaldimension eine eigene Matrix. Das System ist symmetrisch zur  $x$ - $z$ - und zur  $y$ - $z$ -Ebene.

Im **allgemein-astigmatischen** Falle schließlich benötigt man eine 4-mal-4-Matrix vgl. hier Tabelle 4.2. Dies ist in aller Ausführlichkeit in HODGSON/WEBER (1992) dargelegt.

Jedem Einzelstrahl  $(x, u)$  können wir nun einen Intensitätsanteil  $h(x, u)$  am Gesamtstrahl zuordnen. Diese Verteilung soll die **Strahldichte** genannt werden. Bei einem Durchgang durch ein optisches System  $S$  ändert sie sich zu  $h'$  gemäß:

$$\boxed{h' \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = S h \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\det S} \cdot h \left[ S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \right]} \quad (4.5)$$

Später soll die Strahldichte im Einklang mit der Wellenoptik neu eingeführt und Wignerverteilung genannt werden. Jene Wigner-Verteilung wird auch Beugungsphänomene angemessen beschreiben; dafür werden wir aber negative Intensitäten zulassen müssen.

## 4.2 Wellenoptik und Numerische Propagation

Nun wollen wir die freie Ausbreitung (freie Propagation) von Licht wellenoptisch betrachten, wie sie sich in vielen Lehrbüchern der Optik findet, vgl. HODGSON/WEBER (1992), GOODMAN (1968), GROSS (1996), WELFORD (1988). Gegeben sei das elektrische Feld  $E$  in einer Ebene der Dimension  $N$  (1 oder 2) und in der Zeit. Es sei stationär und strikt monochromatisch (strikt kohärent) mit einer Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$ , so daß  $E(x, t) = E(x, 0) \cdot e^{i\omega t}$ , womit wir die Zeitabhängigkeit vernachlässigen können. Seine Polarisation sei homogen und damit vernachlässigbar, womit  $E$  skalar ist. Der Imaginäranteil repräsentiere wie gewohnt die magnetische Feldstärke.

Wir stellen uns nun vor, daß von jedem Punkte in dieser Ebene eine Kugelwelle ausgehe und in einer Entfernung  $R$  die Feldstärke

$$E(R) = R^{-N/2} \cdot e^{-ikR} \cdot E(0) \quad (4.6)$$

erzeuge. Die Integration über all diese Kugelwellen, die sog. **Huygenschen Elementarwellen** ergibt das propagierte E-Feld  $PE$  in einer Ebene im Abstände  $L$  und wird **Kirchhoff-Integral** genannt. Hierbei stellt der Faktor  $\cos \vartheta = L/R$  die Lambertsche Abstrahlcharakteristik dar:

$$PE = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \int \cdot \frac{1}{R} \cdot E(x) \cdot e^{-ikR} \cdot \cos \vartheta \, d^N x'; \quad (4.7)$$

Es bedeutet  $R = \sqrt{L^2 + (x - x')^2}$  den Abstand zwischen zwei Punkten der Start- und Zielebene und  $\cos \vartheta = L/R$  die Lambertsche Abstrahlcharakteristik und soll wegen  $L \approx R$  nicht weiter beachtet werden.

Diese Transformation  $P$  läßt sich nun darstellen als

$$PE = \int E(x') \cdot \kappa(x, x') \, dx' \quad (4.8)$$

mit dem **Kern** (auch Impulsantwort, *point-spread function*)

$$\kappa(x, x') = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^{N/2} \frac{1}{R^N} \cdot e^{-ikR}. \quad (4.9)$$

Betrachten wir nun den Fall  $L \gg |x, \tilde{x}|$  oder  $L \gg a$ , wo  $a$  die Größe der Apertur bedeutet. Den Bruch  $1/R^N$  können wir gewiß durch  $1/L^N$  annähern. Der Exponent  $-ikR$  wird für  $L \gg \lambda$  sehr groß und führt schnelle Oszillationen in der Potenz  $e^{ikR}$  aus; hier müssen wir vorsichtiger nähern.

Mit der Taylorschen Näherung  $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$  erhalten wir:

$$R = L \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x - x'}{L}\right)^2} \approx L + \frac{1}{2L}(x - x')^2 \quad (4.10)$$

Hieraus erhalten wir den Kern des **Fresnel-Integrals**:

$$\boxed{\kappa(x, x') = \left(\frac{i}{\lambda L}\right)^{N/2} \exp(-ikL) \cdot \exp\left[-\frac{ik}{2L}(x - x')^2\right]} \quad (4.11)$$