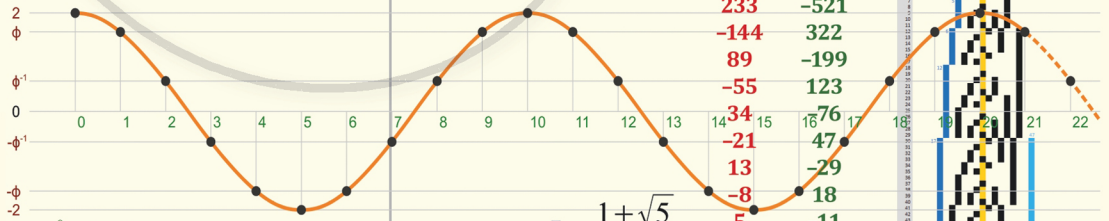


Wolfgang Süß

Werden

Φ

Die Mitte
des Zentrums



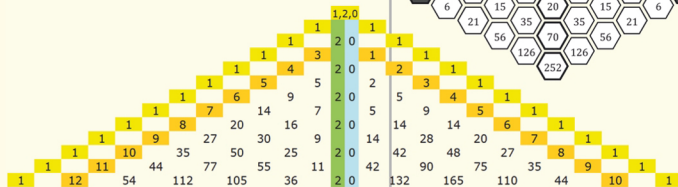
$$\Phi^0 = 1 = 2$$

$$\Phi^5 - 5\Phi^3 + 5\Phi^1 = -2$$

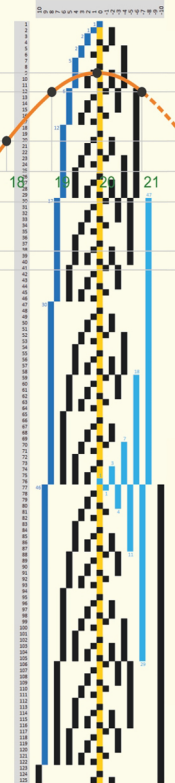
$$\Phi^{10} - 10\Phi^8 + 35\Phi^6 - 50\Phi^4 + 25\Phi^2 - 2\Phi^0 = 2$$

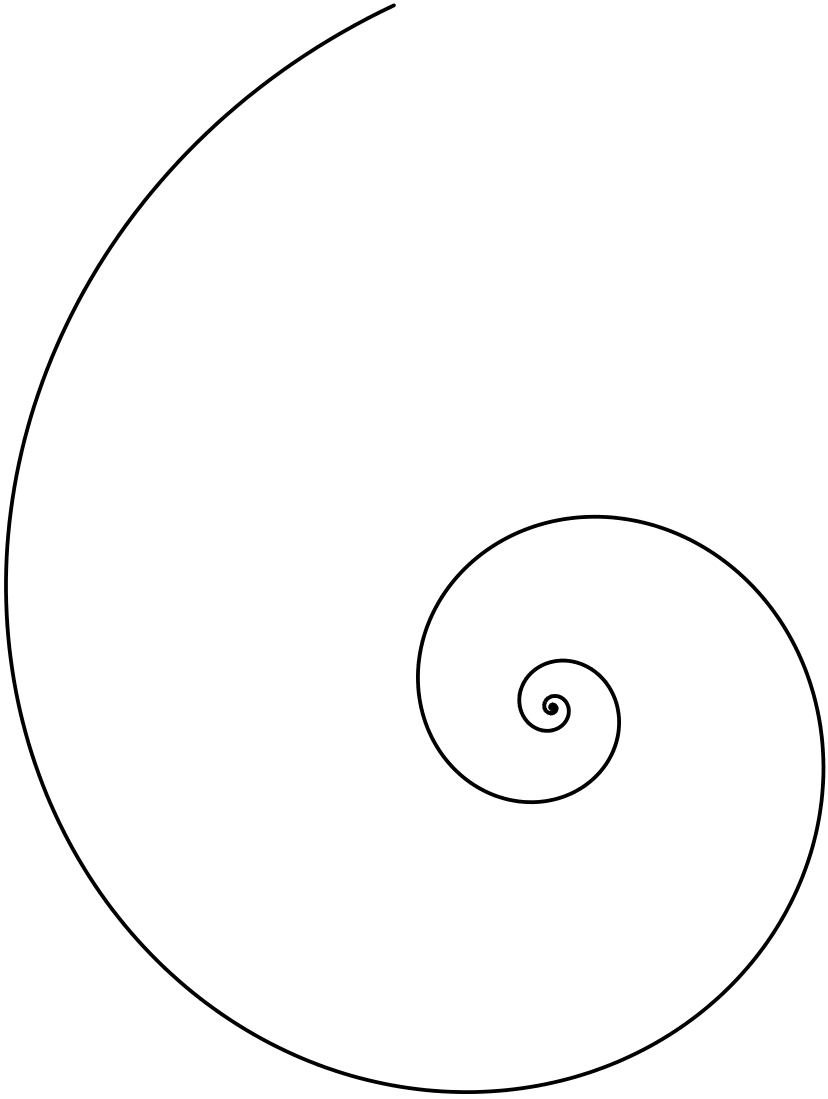
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$



233	-521
-144	322
89	-199
-55	123
34	-76
-21	47
13	-29
-8	18
5	-11
-3	7
2	-4
-1	3
1	-1
0	2
1	1
1	3
2	4
3	7
5	11
8	18
13	29
21	47
34	76
55	123
89	199
144	322
233	521





Wolfgang Süß

Werden

ISBN 978-3-7528-7466-2

1. Auflage

© 2018

www.number-phi.net

Grafik, Satz, Lektorat: Wolfgang Süß

Herstellung und Verlag: BoD – [Books on Demand](http://www.bod.de), Norderstedt – www.bod.de

Gewidmet
allem Irrationalen

Inhalt

Vorwort	9
Werden	11
Eine Folge und deren Folgen	37
Berechnung der Potenzen von Φ	95
Cosinus Φ	101
Zahlensysteme	113
Logik	193
Nachwort	203
Danke	209
Literatur	211

Vorwort

Vor Jahren habe ich einmal irgendwo gelesen (ich erinnere mich nicht mehr, wo), dass das Interesse an einem Buch mit jeder mathematischen Formel, die es enthält, um 50 % sinkt. Da dieses Buch mehrere Hundert Formeln enthält (den genauen Wert kenne ich nicht, ich habe sie nicht gezählt), dürfte das Interesse an diesem Buch also sehr nahe bei null liegen. Nehmen wir an, dieses Buch enthält 250 Formeln (tatsächlich sind es bestimmt mehr), dann liegt das Interesse (ausgehend von einem Standardwert von 1) bei

$$\frac{1}{2^{250}} = 2^{-250} \approx 5,5 \cdot 10^{-76}$$

Wenn du, liebe Leserin, lieber Leser, verstehst, wie ich zu dieser Formel komme, hast du bereits mehr als ausreichendes Grundwissen, um den mathematischen Teil dieses gesamten Buches zu verstehen. Verstehst du es nicht, ist es zunächst nicht weiter schlimm – ich ermuntere dich in diesem Fall dazu, es trotzdem zu versuchen. Mehr als einen Hauptschulabschluss brauchst du nicht, um fast alles verstehen zu können. Und höhere Mathematik kommt in diesem Buch nicht vor.

Solltest du Mathematiker sein, dann gehörst du nicht zur Zielgruppe meiner Leser. In diesem Fall kannst du das Buch einfach weglegen oder deinem Gärtner schenken. Denn in diesem Buch beginnt kein einziger Satz mit dem Wort »Sei« und auch Begriffe wie »Korollar«, »Lemma« oder »Deduktion« finden keinerlei Verwendung. Es ist also ein zutiefst unwissenschaftliches Buch. Und im Übrigen dreht sich alles nur um eine einzige Zahl. Immer wieder um eine einzige Zahl. Langweilig!

Solltest du jetzt immer noch nicht abgeschreckt sein, dann wünsche ich dir viel Spaß beim Tanz um die Goldene Zahl!

Wolfgang Süß

Werden

*Nimm etwas und gib etwas Anderes dazu. Das Ergebnis ist etwas Neues.
Das machst du mit dem Anderen und dem Neuen wieder. Beliebiger oft.*

|» Das ist das ganze Gesetz des Entstehens, des Werdens.

Ich werde dir das anhand von Zahlen zeigen.

Nimm eine x-beliebige Zahl und gib eine andere beliebige Zahl dazu, das heißt, zähle sie zusammen.

«| Gut, ich nehme 37,42 und gebe 12 dazu. Das Ergebnis ist 49,42.

|» Dann mache das wie oben beschrieben wieder: Gib zur letzten Zahl das Ergebnis dazu:

$$12 + 49,42 = 61,42$$

«| Wie oft soll ich das machen? Ich mach's einfach ein paarmal ... also:

$$\begin{aligned} 49,42 + 61,42 &= 110,84 \\ 61,42 + 110,84 &= 172,26 \\ 110,84 + 172,26 &= 283,10 \\ 172,26 + 283,10 &= 455,36 \\ 283,10 + 455,36 &= 738,46 \\ 455,36 + 738,46 &= 1193,82 \\ 738,46 + 1193,82 &= 1932,28 \\ 1193,82 + 1932,28 &= 3126,10 \\ 1932,28 + 3126,10 &= 5058,38 \\ 3126,10 + 5058,38 &= 8184,48 \end{aligned}$$

«| So, ich hab das jetzt 10-mal gemacht, das muss reichen. Und wozu soll das gut gewesen sein?

|» Ich möchte, dass du dir anschaust, um welchen Faktor das Ergebnis jeweils wächst.

«| Um welchen Faktor das Ergebnis wächst? Wie meinst du das?

|» Der Faktor ist der Betrag, mit dem du das vorletzte Ergebnis multiplizieren musst, um das letzte Ergebnis zu erhalten. Wenn du also das letzte Ergebnis durch das vorhergehende dividierst, dann erhältst du den Faktor, um welchen das Ergebnis zuletzt angewachsen ist. Kompliziert? Probier's einfach aus.

«| O.k., wenn du meinst ...

$$\frac{172,26}{110,84} = 1,5541$$

$$\frac{283,10}{172,26} = 1,6434$$

$$\frac{455,36}{283,10} = 1,6085$$

$$\frac{738,46}{455,36} = 1,6217$$

$$\frac{1193,82}{738,46} = 1,6166$$

$$\frac{1932,28}{1193,82} = 1,6186$$

$$\frac{3126,10}{1932,28} = 1,6178$$

$$\frac{5058,38}{3126,10} = 1,6181$$

$$\frac{8184,48}{5058,38} = 1,6180$$

|» Fällt dir was auf?

«| Ja, der Faktor scheint sich bei etwa 1,618 einzupendeln.

|» Genau. Wenn du noch weiterrechnest, dann wirst du merken, dass sich der Faktor immer genauer bei 1,61803398875... einpendelt. Diese Zahl nennen die Mathematiker Φ (*Phi* – sprich: *Fi* – der 21. Buchstabe im griechischen Alphabet). Sie ist eine der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ und hat den Betrag

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803398875...$$

«| Ich versteh das zwar nicht, aber ...

|» Das macht einstweilen nichts. Machen wir einen zweiten Versuch. Such dir bitte zwei andere Zahlen aus, irgendwelche »schrägen« Zahlen ...

«| Noch zwei?

|» Ja, wir wollen diese Rechenregel auch noch mit zwei ganz anderen Zahlen ausprobieren und uns das Ergebnis anschauen.

«| Ich nehme die Zahlen 1,37 und minus 329. Ich darf doch auch eine negative Zahl verwenden?

|» Natürlich, ich sagte ganz bewusst, *irgendwelche* Zahlen.

«| Da bin ich aber gespannt ...

$$\begin{aligned}(1,37) + (-329,00) &= -327,63 \\ (-329,00) + (-327,63) &= -656,63 \\ (-327,63) + (-656,63) &= -984,26 \\ (-656,63) + (-984,26) &= -1640,89 \\ (-984,26) + (-1640,89) &= -2625,15 \\ (-1640,89) + (-2625,15) &= -4266,04 \\ (-2625,15) + (-4266,04) &= -6891,19 \\ (-4266,04) + (-6891,19) &= -11157,23 \\ (-6891,19) + (-11157,23) &= -18048,42 \\ (-11157,23) + (-18048,42) &= -29205,65 \\ (-18048,42) + (-29205,65) &= -47254,07\end{aligned}$$

Genügt das? Es kommt jetzt etwas ganz Anderes heraus. Das sind lauter negative Zahlen!

|» Macht nichts, rechne bitte trotzdem die jeweiligen Faktoren bei den Ergebnissen aus.

«| O. k.

$$\frac{-656,63}{-327,63} = 2,0042$$

$$\frac{-984,26}{-656,63} = 1,4990$$

$$\frac{-1640,89}{-984,26} = 1,6671$$

$$\frac{-2625,15}{-1640,89} = 1,5998$$

$$\frac{-4266,04}{-2625,15} = 1,6251$$

$$\frac{-6891,19}{-4266,04} = 1,6154$$

$$\frac{-11157,23}{-6891,19} = 1,6191$$

$$\frac{-18048,42}{-11157,23} = 1,6176$$

$$\frac{-29205,65}{-18048,42} = 1,6182$$

$$\frac{-47254,07}{-29205,65} = 1,6180$$

Aha! Das scheint tatsächlich wieder auf das gleiche Ergebnis hinauszulaufen ... ist das bei *allen* Zahlen so?

|» Ja, das ist bei *allen* Zahlen so. Es ist wirklich vollkommen egal, welche Zahlen du verwendest, das Ergebnis nähert sich immer der Zahl $\Phi = 1,61803398875\dots$ Es funktioniert sogar dann, wenn eine der beiden Zahlen NULL ist.

«| Bei NULL? Das glaub ich nicht.

|» Probier's aus!

«| O. k., ich nehme 7 und 0.

$$7 + 0 = 7$$

$$0 + 7 = 7$$

$$7 + 7 = 14$$

$$7 + 14 = 21$$

⋮

Ja, ja ich hab's kapiert, ich glaub's dir!

|» Prima. Du siehst also, dass diese »Wachstumsregel« immer zum gleichen Ergebnis führt, egal von welcher Position du angefangen hast. Jetzt werde ich dir

ein paar Eigenschaften dieser sonderbaren Zahl Φ zeigen.

Der Kehrwert von Φ ist um genau 1 kleiner als Φ :

$$\frac{1}{1,618034} = 0,618034$$

Und wenn du das Quadrat von Φ ausrechnest, dann wirst du feststellen, dass dieses um genau 1 größer ist als Φ :

$$1,618034^2 = 2,618034$$

Das ist schon mal ziemlich bemerkenswert. – So, jetzt werden wir uns diese Zahl noch etwas genauer anschauen. Kann man sie eigentlich exakt berechnen? Die Antwort ist Nein, denn sie gehört zur Gruppe der sogenannten *irrationalen Zahlen*^[1] – so bezeichnen Mathematiker Zahlen, die durch keine Bruchzahl berechnet werden kann. Die Zahlen rechts vom Komma werden nie periodisch, d. h. du kannst nie vorhersagen, welches die nächste Zahl sein wird: 1,6180339887498 9484820458683436563811772030917980576286213544862270526046....

Probieren wir die »Wachstumsregel« doch einmal mit den Zahlen 1 und Φ aus:

1,00000000000000000000...
1,61803398874989484820...
2,61803398874989484820...
4,23606797749978969640...
6,85410196624968454461...
11,09016994374947424102...
17,94427190999915878563...
29,03444185374863302665...
46,97871376374779181229...
76,01315561749642483895...
122,99186938124421665125...
199,00502499874064149020...

1 https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl

321,99689437998485814146...
521,00191937872549963166...
842,99881375871035777312...
1364,00073313743585740479...
2206,99954689614621517792...
3571,00028003358207258272...
5777,99982692972828776065...
9349,00010696331036034337...
15126,99993389303864810402...
24476,00004085634900844740...
39602,99997474938765655143...
64079,00001560573666499884...
103681,99999035512432155028...
167761,00000596086098654912...
271442,99999631598530809940...
439204,00000227684629464853...
710646,99999859283160274794...
1149851,00000086967789739648...
1860497,99999946250950014442...
3010349,00000033218739754091...
4870846,99999979469689768534...
7881196,00000012688429522625...
12752042,99999992158119291159...
20633239,00000004846548813785...

Fällt dir etwas auf?

«| Ja, es entstehen rechts vom Komma immer mehr Nullen oder Neuner ... das scheint sich alles in Richtung ganzer Zahlen zu bewegen.

|» Genau, die Differenz zu einer ganzen Zahl wird immer kleiner. – So, und jetzt teilen wir diese Zahlen, die wir hier erhalten haben, in den Teil links vom Komma und den Teil rechts vom Komma auf und schauen uns das etwas näher an. Beginnen wir mit der 13. Zahl in der Reihe: 521,00191937872549963166 .

Links vom Komma steht 521, rechts davon 0,00191937872549963166. Auf den ersten Blick scheint das nichts Besonderes zu sein. Dieser Eindruck ändert sich jedoch schlagartig, wenn wir den Kehrwert des Nachkommateils bilden:

$$\frac{1}{0,00191937872549963166} = 521,00191937872549963$$

Was sagst du dazu?

«| Das ist wieder dieselbe Zahl wie vorher! Ist das Zufall?

|» Wäre es Zufall, dann wäre dieser *sehr* zufällig ... Probieren wir es auch noch mit einer anderen Zahl – z. B. mit der 18. Zahl: 5777,99982692972828776065

«| Mit dieser Zahl wird es nicht funktionieren, denn deren Nachkommateil ist nahe bei 1 ...!

|» Da hast du schon recht, aber schau dir bitte nochmal die Reihe mit den immer mehr werdenden Nullen und Neunern von vorhin an:

1,00000000000000000000
 1,61803398874989484820
 2,61803398874989484820
 4,23606797749978969640
 6,85410196624968454461
 11,09016994374947424102
 17,94427190999915878563
 29,03444185374863302665
 46,97871376374779181229
 76,01315561749642483895
 122,99186938124421665125
 199,00502499874064149020
 321,99689437998485814146
 521,00191937872549963166
 842,99881375871035777312
 1364,00073313743585740479
 2206,99954689614621517792
 3571,00028003358207258272
 5777,99982692972828776065
 9349,00010696331036034337
 15126,99993389303864810402
 ⋮

Wie du siehst, pendeln die Werte immer genauer um eine ganze Zahl. Immer schön abwechselnd einmal knapp darüber, dann knapp darunter. Wir müssen uns also mit der Differenz zur jeweiligen ganzen Zahl beschäftigen. Liegt der Wert knapp darüber, wie vorher bei 521,00191937872549963166, dann entspricht die Differenz genau dem Nachkommanteil. Liegt er knapp darunter, wie bei 5777,99982692972828776065, dann ist die ganze Zahl 5778 und die Differenz des Nachkommanteils zu dieser ganzen Zahl beträgt

$$5778 - 5777,99982692972828776065 = 0,00017307027171223935$$

Wir betrachten also den Kehrwert dieser Differenz:

$$\frac{1}{0,00017307027171223935} = 5777,99982692972828776065$$

Zufrieden?

«| Und wie!

|» Ja, das ist wirklich schön. Auch hier ist der Kehrwert des Nachkommateils wieder genau die ursprüngliche Zahl. – Jetzt zeige ich dir zwischendurch noch etwas, zu dem ein Mathematiker »Na logisch!« sagen würde. In unserer Reihe, die wir mit der Summe aus 1 und Φ begonnen haben, können wir die Ergebnisse auch dann erhalten, wenn wir stattdessen das jeweilige Ergebnis immer mit Φ multiplizieren. Wir haben ja ganz am Anfang (als wir die »Wachstumsregel« noch mit beliebigen Zahlen angewendet hatten) gesehen, dass wir bei immer öfterer Anwendung der Regel den immer genauer werdenden Faktor Φ erhalten. Wenden wir diese Regel auf die Zahl Φ selber an, dann muss von Anfang an der Faktor genau die Größe von Φ haben. Wie gesagt – Mathematiker-Logik! Also:

$$\begin{aligned} 1,000000000000 \times 1,618033988750 &= 1,618033988750 \\ 1,618033988750 \times 1,618033988750 &= 2,618033988750 \\ 2,618033988750 \times 1,618033988750 &= 4,236067977500 \\ 4,236067977500 \times 1,618033988750 &= 6,854101966250 \\ 6,854101966250 \times 1,618033988750 &= 11,090169943749 \\ 11,090169943749 \times 1,618033988750 &= 17,944271909999 \\ 17,944271909999 \times 1,618033988750 &= 29,034441853749 \\ 29,034441853749 \times 1,618033988750 &= 46,978713763748 \\ 46,978713763748 \times 1,618033988750 &= 76,013155617496 \\ 76,013155617496 \times 1,618033988750 &= 122,991869381244 \\ 122,991869381244 \times 1,618033988750 &= 199,005024998740 \\ 199,005024998740 \times 1,618033988750 &= 321,996894379985 \\ 321,996894379985 \times 1,618033988750 &= 521,001919378725 \\ 521,001919378725 \times 1,618033988750 &= 842,998813758710 \\ 842,998813758710 \times 1,618033988750 &= 1364,000733137436 \\ 1364,000733137436 \times 1,618033988750 &= 2206,999546896146 \\ 2206,999546896146 \times 1,618033988750 &= 3571,000280033582 \\ 3571,000280033582 \times 1,618033988750 &= 5777,999826929728 \\ 5777,999826929728 \times 1,618033988750 &= 9349,000106963310 \\ 9349,000106963310 \times 1,618033988750 &= 15126,999933893039 \end{aligned}$$

«| Ja, das leuchtet mir ein ... vorher haben wir uns erst an diese ominöse Zahl immer weiter herangepircht, aber jetzt haben wir gleich damit angefangen und sind sozusagen schon von Anfang an dort. Du hast recht, das ist »logisch«!

Wenn ich mir die »großen« Zahlen anschau, dann werden diese offensichtlich immer mehr zu »ganzen Zahlen«. Denn 5777,9998269 ist fast genau 5778 und ebenso ist 9349,0001069 fast genau 9349. Kann man diese Folge nicht gleich von vornherein mit ganzen Zahlen beginnen?

|» Klar kann man das. Probier bitte Folgendes: Geh diese Folge von den großen ganzen Zahlen zu immer kleineren ganzen Zahlen durch und beobachte, was passiert.

«| O.k., ich beginne also bei 15126,99993389 – die gerundete ganze Zahl ist 15127 – und gehe zurück zu 9349 usw.:

15127
9349
5778
3571
⋮

Stimmt das so? Anstatt wie »von unten nach oben« immer die vorhergehende Zahl dazuzuzählen, ziehe ich jetzt »von oben nach unten« immer die letzte Zahl ab und schreibe das Ergebnis der Differenz hin.

|» Genau.

«| Gut, dann mache ich das jetzt weiter:

∴
2207
1364
843
521
322
199
123
76
47
29
18
11
7
4
3
1

|» Mach ruhig weiter!

«| Ich bin aber schon bei 1 angelangt!

|» Na und? Mach einfach weiter und schau, was passiert.

∴
4
3
1
2
-1
3
-4
7
-11
18
-29
∴