

A photograph of the Great Pyramids of Giza in Egypt, captured during a golden sunset. The pyramids are silhouetted against a bright orange and yellow sky. The sun is visible on the right side, partially obscured by the pyramids. The foreground is a sandy desert.

Eberhard Zeidler *Hrsg.*

Springer-Handbuch der Mathematik III

Begründet von I. N. Bronstein
und K. A. Semendjaew

Weitergeführt von G. Grosche,
V. Ziegler und D. Ziegler

Herausgegeben von E. Zeidler

 Springer Spektrum

Springer-Handbuch der Mathematik III

Herausgeber:

Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, Deutschland

Beitragsautoren:

Prof. Dr. Eberhard Zeidler, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig (Kap. 5 bis 6)

Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz, Universität Zürich (Kap. 7.1–7.6)

Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig (Kap. 7.7)

Prof. Dr. Bernd Luderer, TU Chemnitz (Kap. 8.1, 8.13)

Prof. Dr. Jochen Blath, TU Berlin (Kap. 8.2, 8.3)

Prof. Dr. Alexander Schied, Universität Mannheim (Kap. 8.4, 8.5)

Prof. Dr. Stephan Dempe, TU Bergakademie Freiberg (Kap. 8.6–8.10)

Prof. Dr. Gert Wanka, TU Chemnitz (Kap. 8.11, 8.12)

Prof. Dr. Juraj Hromkovic, ETH Zürich (Kap. 9.1–9.9)

Prof. Dr. Siegfried Gottwald, Universität Leipzig (Kap. 9.10)

Springer-Handbuch der Mathematik III

Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew
Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler
Herausgegeben von E. Zeidler

Herausgeber

Prof. Dr. Eberhard Zeidler

Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften

Leipzig

Deutschland

ISBN 978-3-658-00274-9

ISBN 978-3-658-00275-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-00275-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de

Vorwort

Theoria cum praxi

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Die Mathematik spielt eine wichtige Rolle in vielen Bereichen unserer modernen Gesellschaft. Sie ist eine Querschnittswissenschaft und zugleich eine Schlüsseltechnologie mit vielfältigen engen Verbindungen zu anderen Wissenschaften. Das betrifft die Naturwissenschaften, die Ingenieurwissenschaften, die Informatik und Informationstechnologie, die Wirtschafts- und Finanzwissenschaft, die Sozialwissenschaften sowie die Medizin. Mathematik ist abstrakt und zugleich sehr praktisch. Das vorliegende

SPRINGER-HANDBUCH DER MATHEMATIK,

das sich um einen breit angelegten Brückenschlag zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen bemüht, stellt eine wesentliche Erweiterung des SPRINGER-TASCHENBUCHES DER MATHEMATIK dar, das 2012 im Verlag Springer Spektrum erschienen ist. Das Springer-Handbuch umfasst die folgenden vier Teile:

- TEIL I: Analysis.
- TEIL II: Algebra, Geometrie, Grundlagen der Mathematik.
- TEIL III: Variationsrechnung und Physik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wirtschafts- und Finanzmathematik, Algorithmen und Informatik.
- TEIL IV: Funktionalanalysis, Dynamische Systeme, Mannigfaltigkeiten, Topologie, Mathematische Physik.

Als mehrbändiges Nachschlagewerk ist das Springer-Handbuch in erster Linie für wissenschaftliche Bibliotheken gedacht, die ihren Leserinnen und Lesern parallel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik das umfangreichere Material des Springer-Handbuches (in elektronischer Form und Papierform) zur Verfügung stellen wollen. Für individuell interessierte Leserinnen und Leser sei auf folgendes hingewiesen. Die Teile I bis III des Springer-Handbuches der Mathematik enthalten die entsprechenden Kapitel des Springer-Taschenbuches der Mathematik, die durch wichtiges zusätzliches Material ergänzt werden. Dagegen sind die neun Kapitel von Teil IV nicht im Springer-Taschenbuch der Mathematik enthalten.

Teil I enthält neben dem einführenden Kapitel und dem Kapitel 1 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zur höheren komplexen Funktionentheorie und zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Teil II enthält neben den Kapiteln 2–4 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu folgenden Gebieten: multilineare Algebra, höhere Zahlentheorie, projektive Geometrie, algebraische Geometrie und Geometrien der modernen Physik.

Teil III enthält neben den Kapiteln 5–9 des Springer-Taschenbuches der Mathematik zusätzliches Material zu stochastischen Prozessen.

Teil IV enthält die folgenden Zusatzkapitel zum Springer-Taschenbuch der Mathematik:

- Kapitel 10: Höhere Analysis (Tensoranalysis und spezielle Relativitätstheorie, Integralgleichungen, Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, moderne Maß- und Integrationstheorie).
- Kapitel 11: Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 12: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen.
- Kapitel 13: Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit.
- Kapitel 14: Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften.
- Kapitel 15: Mannigfaltigkeiten.
- Kapitel 16: Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie.
- Kapitel 17: Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen - Mathematik der Symmetrie.
- Kapitel 18: Topologie - Mathematik des qualitativen Verhaltens.
- Kapitel 19: Krümmung, Topologie und Analysis (Eichtheorie in Mathematik und Physik).

Hier werden im Rahmen der mathematischen Physik die Bedürfnisse der modernen Physik berücksichtigt. Am Ende von Teil IV findet man eine Tafel zur Geschichte der Mathematik. Die sorgfältig zusammengestellten Literaturangaben am Ende jedes Kapitels sollen dem Leser helfen, bei auftretenden Fragen geeignete moderne Bücher zu konsultieren, wobei zwischen einführender Literatur und anspruchsvollen Standardwerken gewählt werden kann.

Das vorliegende Springer-Handbuch der Mathematik wendet sich an:

- Fortgeschrittene Studierende der Mathematik und angrenzender naturwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher Fachrichtungen, Graduierte, Doktoranden
- Mathematiker, Physiker, Ingenieure, Informatiker, Wirtschaftsmathematiker in Forschung, Lehre und Praxis
- wissenschaftliche Bibliotheken, akademische Institutionen und Firmen.

Die Bedürfnisse eines derart breiten Leserkreises werden berücksichtigt, indem der Bogen von elementaren Kenntnissen bis hin zu anspruchsvollen mathematischen Resultaten sehr weit gespannt wird und das Werk ein breites Spektrum mathematischer Gebiete überdeckt. Großer Wert wird dabei auf folgende Aspekte gelegt:

- ausführliche Motivation und Erläuterung der Grundideen,
- leichte Fasslichkeit, Anschaulichkeit, und Übersichtlichkeit,
- die Verbindung zwischen reiner und angewandter Mathematik,
- vielseitige Anwendungen der Mathematik und Praxisnähe, sowie
- die Diskussion des historischen Hintergrunds.

Es wird gezeigt, dass die Mathematik mehr ist als eine trockene Ansammlung von Formeln, Definitionen, Theoremen und Rechenrezepten. Sie ist ein unverzichtbarer Partner der modernen Technik, und sie hilft wesentlich bei der optimalen Gestaltung von Industrie- und Wirtschaftsprozessen. Gleichzeitig ist die Mathematik ein wichtiger Bestandteil unserer menschlichen Kultur und ein wundervolles Erkenntnisorgan des Menschen, das ihn etwa in der Hochtechnologie, der Elementarteilchenphysik und der Kosmologie in Bereiche vorstoßen lässt, die ohne Mathematik nicht zu verstehen sind, weil sie von unserer täglichen Erfahrungswelt extrem weit entfernt sind.

Während das Springer-Taschenbuch der Mathematik den Anforderungen des Bachelor-Studiums angepasst ist, bezieht sich das Springer-Handbuch der Mathematik sowohl auf das Bachelor-Studium als auch auf das weiterführende Master-Studium.

Bei den Anwendungen der Mathematik spielen Phänomene eine große Rolle, die in Natur und Technik auftreten. Das mathematische Verständnis dieser Phänomene erleichtert dem Anwender in den Naturwissenschaften und in den Ingenieurwissenschaften den Überblick über die Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Disziplinen. Deshalb wird in diesem Springer-Handbuch der Mathematik die Sicht auf wichtige Phänomene besonders betont. Das betrifft:

- Mathematik der Grenzübergänge (Analysis und Funktionalanalysis),
- Mathematik des Optimalen (Variationsrechnung, optimale Steuerung, lineare und nichtlineare Optimierung),
- Mathematik des Zufalls (Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik und stochastische Prozesse),
- Mathematik der Zeit und des Chaos (dynamische Systeme),
- Mathematik der Stabilität von Gleichgewichtszuständen in Natur und Technik, von zeitabhängigen Prozessen und von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Komplexität von Algorithmen auf Computern,
- Mathematik der Symmetrie (Gruppentheorie),
- Mathematik der Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden (Funktionalanalysis),
- Mathematik des qualitativen Verhaltens von Gleichgewichtszuständen und zeitabhängigen Prozessen in Natur und Technik (Topologie),
- Mathematik der Wechselwirkungskräfte in der Natur (nichtlineare partielle Differentialgleichungen und nichtlineare Funktionalanalysis, Differentialgeometrie der Faserbündel und Eichtheorie),
- Mathematik der Strukturen (Kategorientheorie).

Interessant ist die Tatsache, dass klassische Ergebnisse der Mathematik heutzutage im Rahmen neuer Technologien völlig neue Anwendungen erlauben. Das betrifft etwa die Zahlentheorie, die lange Zeit als ein reines Vergnügen des menschlichen Geistes galt. Beispielsweise wird die berühmte Riemannsche Zetafunktion der analytischen Zahlentheorie, die in Kapitel 2 betrachtet wird, in der modernen Quantenfeldtheorie zur Berechnung von Streuprozessen von Elementarteilchen im Rahmen der Renormierungstheorie eingesetzt. Der klassische Satz von Fermat–Euler über Teilbarkeitseigenschaften von Zahlen wird heute wesentlich benutzt, um die Übermittlung von Nachrichten in raffinierter Weise zu verschlüsseln. Das findet man ebenfalls in Kapitel 2.

Das „Springer-Handbuch der Mathematik“ knüpft an eine lange Tradition an. Das „Taschenbuch der Mathematik“ von I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew wurde von Dr. Viktor Ziegler aus dem Russischen ins Deutsche übersetzt. Es erschien 1958 im Verlag B. G. Teubner in Leipzig, und bis zum Jahre 1978 lagen bereits 18 Auflagen vor. Unter der Herausgabe von Dr. Günter Grosche und Dr. Viktor Ziegler und unter wesentlicher redaktioneller Mitarbeit von Frau Dorothea Ziegler erschien 1979 die völlig überarbeitete 19. Auflage, an der Wissenschaftler der Leipziger Universität und anderer Hochschulen des mitteldeutschen Raumes mitwirkten.¹ Diese Neubearbeitung wurde ins Russische übersetzt und erschien 1981 im Verlag für Technisch-Theoretische Literatur in Moskau. Ferner wurden eine englische und eine japanische Übersetzung publiziert.

Motiviert durch die stürmische Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen erschien in den Jahren 1995 und 1996 ein völlig neuverfasstes, zweibändiges „Teubner-Taschenbuch der Mathematik“ im Verlag B. G. Teubner, Stuttgart und Leipzig.² Das daraus entstandene, vorliegende „Springer-Handbuch der Mathematik“ enthält zwei völlig neu geschriebene Kapitel über Wirtschafts- und Finanzmathematik sowie über Algorithmik und Informatik.

¹Bis 1995 erschienen sieben weitere Auflagen.

²Die englische Übersetzung des ersten Bandes erschien 2003 im Verlag Oxford University Press, New York, als „Oxford Users' Guide to Mathematics“.

Die moderne Konzeption und Koordination des Kapitels 8 über Wirtschafts- und Finanzmathematik lag in den erfahrenen Händen von Herrn Prof. Dr. Bernd Luderer (TU Chemnitz). In das von Herrn Prof. Dr. Juraj Hromkovič (ETH Zürich) verfasste Kapitel 9 über Algorithmik und Informatik flossen seine reichen Lehrerfahrungen ein. Im Mittelpunkt steht das zentrale Problem der Komplexität von Algorithmen. Erinnerung sei daran, dass eines der berühmten sieben Millenniumsprobleme der Mathematik aus dem Jahre 2000 eine tiefe Frage der Komplexitätstheorie betrifft. Das Kapitel 7 über Numerik und Wissenschaftliches Rechnen wurde von Herrn Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig) wesentlich überarbeitet, und die übrigen Kapitel wurden aktualisiert. Der Herausgeber möchte den Kollegen Hackbusch, Hromkovič und Luderer sowie allen seinen Koautoren für ihre engagierte Arbeit sehr herzlich danken. Das betrifft:

- Prof. Dr. Hans-Rudolf Schwarz (7.1–7.6) und Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch (7.7),
- Prof. Dr. Bernd Luderer (8.1, 8.13), Prof. Dr. Jochen Blath (8.2, 8.3), Prof. Dr. Alexander Schied (8.4, 8.5), Prof. Dr. Stephan Dempe (8.6–8.10) und Prof. Dr. Gert Wanka (8.11, 8.12),
- Prof. Dr. Juraj Hromkovič (9.1– 9.9) und Prof. Dr. Siegfried Gottwald (9.10).

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Frau Micaela Krieger-Hauwede für das sorgfältige Anfertigen vieler Abbildungen in den Teilen I bis III, das Lesen der Korrekturen und die einfühlsame, ästhetisch gelungene Textgestaltung. Frau Kerstin Fölting danke ich sehr herzlich für das sorgfältige Anfertigen der Abbildungen und der \LaTeX -Version von Teil IV sowie für zahlreiche Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Den Mitarbeitern des Leipziger Max-Planck-Institutes für Mathematik in den Naturwissenschaften, Regine Lübke (Sekretariat), Katarzyna Baier und Ingo Brüggemann (Bibliothek), Oliver Heller und Rainer Kleinrensing (EDV-Abteilung) sei sehr herzlich für die technische Unterstützung bei der Fertigstellung des Springer-Handbuches der Mathematik gedankt. Ferner danke ich sehr herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Springer Spektrum für die Koordination des gesamten Projekts und für die kompetente Aktualisierung des Literaturverzeichnisses. Schließlich sei allen Leserinnen und Lesern gedankt, die in der Vergangenheit durch ihre Hinweise zur Verbesserung der Darstellung beigetragen haben.

Alle Beteiligten hoffen, dass dieses Nachschlagewerk in allen Phasen des Studiums und danach im Berufsleben ein nützlicher Begleiter sein wird, der die Einheit der Mathematik betont.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
5 Variationsrechnung und Physik	1
5.1 Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen	2
5.1.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	2
5.1.2 Anwendungen	5
5.1.3 Die Hamiltonschen Gleichungen	12
5.1.4 Anwendungen	17
5.1.5 Hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum	20
5.1.6 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	23
5.1.7 Anwendungen	24
5.1.8 Natürliche Randbedingungen	27
5.2 Variationsrechnung für Funktionen mehrerer Variabler	29
5.2.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	29
5.2.2 Anwendungen	29
5.2.3 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	33
5.3 Steuerungsprobleme	34
5.3.1 Bellmansche dynamische Optimierung	35
5.3.2 Anwendungen	36
5.3.3 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip	37
5.3.4 Anwendungen	38
5.4 Extremwertaufgaben	40
5.4.1 Lokale Minimumprobleme	40
5.4.2 Globale Minimumprobleme und Konvexität	41
5.4.3 Anwendungen auf die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß	41
5.4.4 Anwendungen auf Pseudoinverse	42
5.4.5 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	43
5.4.6 Anwendungen auf die Entropie	44
5.4.7 Der Subgradient	45
5.4.8 Dualitätstheorie und Sattelpunkte	46
Literatur zu Kapitel 5	47
6 Stochastik – Mathematik des Zufalls	49
6.1 Elementare Stochastik	50
6.1.1 Das klassische Wahrscheinlichkeitsmodell	51
6.1.2 Das Gesetz der großen Zahl von Jakob Bernoulli	53
6.1.3 Der Grenzwertsatz von Moivre	54
6.1.4 Die Gaußsche Normalverteilung	55
6.1.5 Der Korrelationskoeffizient	57
6.1.6 Anwendungen auf die klassische statistische Physik	60
6.2 Die Kolmogorowschen Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	63
6.2.1 Das Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten	66
6.2.2 Zufällige Variable	70
6.2.3 Zufallsvektoren	76
6.2.4 Grenzwertsätze	81

6.2.5	Anwendungen auf das Bernoullische Modell für Folgen unabhängiger Versuche	83
6.3	Mathematische Statistik	91
6.3.1	Grundideen	91
6.3.2	Wichtige Schätzfunktionen	93
6.3.3	Die Untersuchung normalverteilter Messgrößen	94
6.3.4	Die empirische Verteilungsfunktion	97
6.3.5	Die Maximum-Likelihood-Methode zur Gewinnung von Parameterschätzungen	103
6.3.6	Multivariate Analysen	105
6.4	Stochastische Prozesse	108
6.4.1	Zeitreihen	109
6.4.2	Markowsche Ketten und stochastische Matrizen	115
6.4.3	Poissonsche Prozesse	117
6.4.4	Brownsche Bewegung und Diffusion	118
6.4.5	Der Hauptsatz von Kolmogorow für allgemeine stochastische Prozesse	122
	Literatur zu Kapitel 6	124
7	Numerik und Wissenschaftliches Rechnen	127
7.1	Numerisches Rechnen und Fehleranalyse	128
7.1.1	Begriff des Algorithmus	128
7.1.2	Zahldarstellung in Computern	128
7.1.3	Fehlerquellen, Fehlererfassung, Kondition und Stabilität	130
7.2	Lineare Algebra	131
7.2.1	Lineare Gleichungssysteme – direkte Methoden	131
7.2.2	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	136
7.2.3	Eigenwertprobleme	136
7.2.4	Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate	141
7.3	Interpolation, numerische Differentiation und Quadratur	145
7.3.1	Interpolationspolynome	145
7.3.2	Numerische Differentiation	150
7.3.3	Numerische Quadratur	150
7.4	Nichtlineare Probleme	155
7.4.1	Nichtlineare Gleichungen	155
7.4.2	Nichtlineare Gleichungssysteme	157
7.4.3	Berechnung der Nullstellen von Polynomen	159
7.5	Approximation	161
7.5.1	Approximation im quadratischen Mittel	161
7.5.2	Gleichmäßige Approximation	165
7.5.3	Genäherte gleichmäßige Approximation	166
7.6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	167
7.6.1	Anfangswertprobleme	167
7.6.2	Randwertprobleme	176
7.7	Partielle Differentialgleichungen und Wissenschaftliches Rechnen	179
7.7.1	Grundideen	179
7.7.2	Diskretisierungsverfahren in der Übersicht	180
7.7.3	Elliptische Differentialgleichungen	184
7.7.4	Parabolische Differentialgleichungen	193
7.7.5	Hyperbolische Differentialgleichungen	196
7.7.6	Adaptive Diskretisierungsverfahren	203
7.7.7	Iterative Lösung von Gleichungssystemen	206
7.7.8	Randelementmethode	215
7.7.9	Technik der hierarchischen Matrizen	217

7.7.10	Harmonische Analyse	219
7.7.11	Inverse Probleme	229
Literatur zu Kapitel 7		231
8	Wirtschafts- und Finanzmathematik	233
8.1	Klassische Finanzmathematik und Anwendungen	233
8.1.1	Lineare Verzinsung	233
8.1.2	Zinseszinsrechnung (geometrische Verzinsung)	234
8.1.3	Rentenrechnung	236
8.1.4	Tilgungsrechnung	238
8.1.5	Kursrechnung	240
8.1.6	Barwerte und Renditen	240
8.1.7	Zinsstrukturkurve	242
8.1.8	Risikokennzahlen festverzinslicher Wertpapiere	244
8.1.9	Risikokennzahlen und Rendite von Portfolios	247
8.1.10	Finanzinnovationen	248
8.2	Lebensversicherungsmathematik	249
8.2.1	Versicherungsformen	250
8.2.2	Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbetafeln	250
8.2.3	Die Zahlungsströme eines Lebensversicherungsvertrages	252
8.2.4	Die Bewertung von Zahlungsströmen und Lebensversicherungsverträgen	254
8.2.5	Äquivalenzprinzip und Nettoprämie	255
8.2.6	Prospektives Deckungskapital	255
8.2.7	Prämienarten	255
8.2.8	Der Satz von Hattendorf	256
8.3	Schadenversicherungsmathematik	257
8.3.1	Das kollektive Modell für eine Versicherungsperiode	257
8.3.2	Berechnung der Gesamtschadenverteilung	259
8.3.3	Ruintheorie, Cramér-Lundberg-Modell	262
8.3.4	Rückversicherung und Risikoteilung	266
8.3.5	Elemente der klassischen Extremwerttheorie	266
8.4	Finanzmathematik in zeitlich diskreten Marktmodellen	267
8.4.1	Wertanlagen, Handelsstrategien und Arbitrage	267
8.4.2	Absicherung und arbitragefreie Bewertung von Optionen	269
8.5	Finanzmathematik in zeitstetigen Marktmodellen	273
8.5.1	Wertprozesse und Handelsstrategien	273
8.5.2	Der Itô-Kalkül	274
8.5.3	Das Black-Scholes-Modell	277
8.6	Lineare Optimierung	282
8.6.1	Primale und duale Aufgabe	282
8.6.2	Primaler Simplexalgorithmus	285
8.6.3	Innere-Punkte-Methode	287
8.6.4	Parametrische lineare Optimierung	289
8.6.5	Das klassische Transportproblem	291
8.6.6	Das Engpasstransportproblem	293
8.7	Nichtlineare Optimierung	294
8.7.1	Optimalitätsbedingungen bei allgemeinen Nebenbedingungen	296
8.7.2	Optimalitätsbedingungen bei expliziten Nebenbedingungen	297
8.7.3	Lagrange-Dualität	300
8.7.4	Sattelpunkte	302
8.7.5	Lösung freier nichtlinearer Optimierungsaufgaben	302
8.7.6	Lösung restringierter Optimierungsaufgaben	303

8.8	Diskrete Optimierung	305
8.8.1	Exakte Lösung von diskreten Optimierungsaufgaben	306
8.8.2	Dualität	310
8.8.3	Näherungsalgorithmen	312
8.8.4	Matroide und der Greedy-Algorithmus	312
8.8.5	Spezielle Probleme	313
8.9	Optimierungsprobleme über Graphen	314
8.9.1	Kürzeste Wege in gerichteten Graphen	315
8.9.2	Minimalgerüste	316
8.9.3	Flussprobleme	317
8.9.4	Kostenminimale Flüsse	319
8.9.5	Matchings minimalen Gewichtes	320
8.9.6	Eulersche Graphen und das Problem des chinesischen Postboten	322
8.9.7	Hamiltonkreise und das Rundreiseproblem	323
8.10	Mathematische Spieltheorie	325
8.10.1	Problemstellung	325
8.10.2	Nash-Gleichgewicht	325
8.11	Vektoroptimierung	327
8.11.1	Problemstellung und grundlegende Begriffe	327
8.11.2	Lineare Skalarisierung und Optimalitätsbedingungen	331
8.11.3	Weitere Skalarisierungstechniken	333
8.11.4	Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitätsbedingungen	334
8.11.5	Dualität	335
8.12	Portfoliooptimierung	336
8.12.1	Das Markowitz-Portfoliooptimierungsproblem	337
8.12.2	Lineare Skalarisierung und eigentlich effiziente Portfolios	338
8.12.3	Dualität und Optimalitätsbedingungen	341
8.12.4	Erweiterungen	341
8.13	Anwendungen der Differentialrechnung in den Wirtschaftswissenschaften	342
8.13.1	Funktionswertänderungen bei Funktionen einer Veränderlichen	342
8.13.2	Funktionswertänderungen bei Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	346
8.13.3	Extremwertprobleme in den Wirtschaftswissenschaften	347
	Literatur zu Kapitel 8	350
9	Algorithmik und Informatik	353
9.1	Geschichte der Informatik	353
9.2	Alphabete, Wörter, Sprachen und Aufgaben	359
9.2.1	Zielsetzung	359
9.2.2	Alphabete, Wörter und Sprachen	360
9.2.3	Algorithmische Probleme	364
9.3	Endliche Automaten	371
9.3.1	Zielsetzung	371
9.3.2	Die Darstellungen der endlichen Automaten	372
9.3.3	Simulationen	382
9.3.4	Beweise der Nichtexistenz	385
9.3.5	Nichtdeterminismus	390
9.4	Turingmaschinen	397
9.4.1	Zielsetzung	397
9.4.2	Das Modell der Turingmaschine	398
9.4.3	Mehrband-Turingmaschinen und Churchs These	405
9.4.4	Nichtdeterministische Turingmaschinen	412

9.4.5	Kodierung von Turingmaschinen	416
9.5	Berechenbarkeit	417
9.5.1	Zielsetzung	417
9.5.2	Die Methode der Diagonalisierung	418
9.5.3	Die Methode der Reduktion	424
9.5.4	Satz von Rice	432
9.6	Komplexitätstheorie	435
9.6.1	Zielsetzung	435
9.6.2	Komplexitätsmaße	436
9.6.3	Komplexitätsklassen und die Klasse P	441
9.6.4	Nichtdeterministische Komplexitätsmaße	444
9.6.5	Die Klasse NP und Beweisverifikation	447
9.6.6	NP-Vollständigkeit	450
9.7	Algorithmik für schwere Probleme	465
9.7.1	Zielsetzung	465
9.7.2	Approximationsalgorithmen	466
9.7.3	Lokale Suche	471
9.7.4	Simulated Annealing	474
9.8	Randomisierung	476
9.8.1	Zielsetzung	476
9.8.2	Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie	478
9.8.3	Ein randomisiertes Kommunikationsprotokoll	480
9.8.4	Die Methode der Fingerabdrücke und die Äquivalenz von zwei Polynomen	483
9.9	Zusammenfassung und Ausblick	487
9.10	Unscharfe Mengen und Fuzzy-Methoden	490
9.10.1	Unschärfe und mathematische Modellierung	490
9.10.2	Mengenalgebra	491
9.10.3	Unscharfe Zahlen und ihre Arithmetik	502
9.10.4	Unscharfe Variable	508
9.10.5	Unscharfe Relationen	509
9.10.6	Unschärfemaße	511
9.10.7	Wahrscheinlichkeiten unscharfer Ereignisse	513
9.10.8	Unscharfe Maße	514
	Literatur zu Kapitel 9	515
	Index	519

VARIATIONSRECHNUNG UND PHYSIK

Da nämlich der Plan des Universums der vollkommenste ist, kann kein Zweifel bestehen, dass alle Wirkungen in der Welt aus den Ursachen mit Hilfe der Methode der Maxima und Minima gleich gut bestimmt werden können.
Leonhard Euler (1707–1783)

Die Mathematik kennt neben der konkurrenzlosen Epoche der Griechen keine glücklichere Konstellation als diejenige, unter der Leonhard Euler geboren wurde. Es ist ihm vorbehalten gewesen, der Mathematik eine völlig veränderte Gestalt zu geben und sie zu dem mächtigen Gebäude auszugestalten, welches sie heute ist.
Andreas Speiser (1885–1970)

Indem er die Eulersche Methode der Variationsrechnung verallgemeinerte, entdeckte Lagrange (1736–1813), wie man in einer einzigen Zeile die Grundgleichung für alle Probleme der analytischen Mechanik aufschreiben kann.
Carl Gustav Jakob Jacobi (1804–1851)

Echte Optimierung ist der revolutionäre Beitrag der modernen mathematischen Forschung zur effektiven Gestaltung von Entscheidungsprozessen.
George Bernhardt Dantzig (1914–2005)¹

In diesem Kapitel betrachten wir die Elemente der Variationsrechnung, der Steuerungstheorie und der Optimierungstheorie. Weiterführende Resultate findet man in den Kapiteln 12 und 14 im Handbuch. Insbesondere erläutern wir dort den Zusammenhang mit der nichtlinearen Funktionalanalysis, der Theorie nichtlinearer partieller Differentialgleichungen und der modernen Physik. Ferner werden im Kapitel 8 Anwendungen der Optimierungstheorie in der Wirtschaftsmathematik betrachtet.²

¹Dantzig entwickelte um 1950 in den USA den grundlegenden Simplexalgorithmus zur linearen Optimierung. Das war der Ausgangspunkt für die moderne Optimierungstheorie, deren Entwicklung eng mit dem Einsatz von leistungsfähigen Computern verbunden ist.

²Eine umfassende einheitliche moderne Darstellung der Variationsrechnung, der Steuerungstheorie und der Optimierungstheorie findet man in [Zeidler 1984, Vol. 3]. Das einigende Band zwischen diesen scheinbar sehr unterschiedlichen Fragestellungen sind die Prinzipien der nichtlinearen Funktionalanalysis, die den Aufbau einer geschlossenen Theorie der „Mathematik des Optimalen“ ermöglicht haben.

5.1 Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen

5.1.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

Gegeben seien die reellen Zahlen t_0, t_1, q_0, q_1 mit $t_0 < t_1$. Wir betrachten das Minimumproblem

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \min!, \quad q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b,} \quad (5.1)$$

und das allgemeinere Problem

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \text{stationär!}, \quad q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b.} \quad (5.2)$$

Die sogenannte *Lagrangefunktion* L sei hinreichend regulär.³

Hauptsatz: Ist $q = q(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ eine C^2 -Lösung von (5.1) oder (5.2), dann gilt die Euler-Lagrangesche Gleichung⁴

$$\boxed{\frac{d}{dt} L_{q'} - L_q = 0.} \quad (5.3)$$

Dieser berühmte Satz wurde von Euler im Jahre 1744 in seinem Werk *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici la tissimo sensu accepti* bewiesen.⁵ Damit schuf er die Variationsrechnung als mathematische Disziplin. Im Jahre 1762 vereinfachte Lagrange die Eulersche Herleitung und war damit in der Lage, die Gleichung (5.3) auf Funktionen mehrerer Variabler zu verallgemeinern (vgl. (5.46)). Carathéodory (1873–1950) bezeichnete die Eulersche Variationsrechnung als „eines der schönsten mathematischen Werke, das je geschrieben worden ist“. Beispiele werden in 5.1.2 betrachtet.

Kommentar: Die Euler-Lagrangesche Gleichung (5.3) ist äquivalent zu dem Problem (5.2). Dagegen stellt die Euler-Lagrangesche Gleichung (5.3) nur eine notwendige Bedingung für das Minimumproblem (5.1) dar. Jede Lösung von (5.1) genügt (5.3). Die umgekehrte Behauptung ist jedoch nicht richtig. In 5.1.5 geben wir hinreichende Bedingungen dafür an, dass Lösungen der Euler-Lagrangeschen Gleichung (5.3) tatsächlich Lösungen des Minimumproblems (5.1) sind.

Verallgemeinerung auf Systeme: Ist $q = (q_1, \dots, q_F)$ in (5.1) oder (5.2), dann muss man (5.3) durch das System der Euler-Lagrangeschen Gleichungen ersetzen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} L_{q'_j} - L_{q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, F.} \quad (5.4)$$

³Diese Bedingung ist beispielsweise erfüllt, wenn $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ vom Typ C^2 ist.

⁴Ausführlich geschrieben hat diese Gleichung die folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q(t), q'(t), t)}{\partial q'} - \frac{\partial L(q(t), q'(t), t)}{\partial q} = 0.$$

⁵Die Übersetzung dieses lateinischen Titels lautet: *Eine Methode, um Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösung des isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird.*

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der Mechanik: In der Mechanik hat man im Fall zeitunabhängiger Kräfte, die ein Potential besitzen, die Lagrangefunktion

$$L = \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie}$$

zu wählen. Dann stellt das System (5.4) die berühmten *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen* dar. Der Parameter t entspricht der Zeit, und q sind beliebige Ortskoordinaten.

Das zugehörige Variationsproblem (5.2) heißt *Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung*.

Hat man es mit der Bewegung von Massenpunkten auf Kurven oder Flächen zu tun (z. B. Kreis- oder Kugelpendel), dann muss man in den Newtonschen Bewegungsgleichungen Zwangskräfte hinzufügen, die das Teilchen auf der Kurve oder der Fläche halten. Dieser Apparat ist schwerfällig. Nach der genialen Idee von Lagrange (1736–1813) ist es viel eleganter, durch Einführung geeigneter Koordinaten, die Nebenbedingungen vollständig zu eliminieren. Das führt auf (5.4) (vgl. z. B. das Kreispendel in 5.1.2). Die Newtonschen Gleichungen der Mechanik *Kraft gleich Masse mal Beschleunigung* lassen sich nicht auf weiterführende physikalische Theorien verallgemeinern (z. B. Elektrodynamik, allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie, Elementarteilchentheorie usw.). Dagegen gilt:

Der Zugang von Lagrange lässt sich auf alle Feldtheorien der Physik verallgemeinern.

Das findet man in Kapitel 14 im Handbuch.

Interpretation der Lösung des Variationsproblems: Wir betrachten eine Kurvenschar

$$q = q(t) + \varepsilon h(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (5.5)$$

die durch die Punkte (t_0, q_0) und (t_1, q_1) geht, d. h., es gilt $h(t_0) = h(t_1) = 0$ (Abb. 5.1). Ferner sei ε ein kleiner reeller Parameter. Setzen wir diese Kurvenschar in das Integral (5.1) ein, dann erhalten wir den Ausdruck

$$\varphi(\varepsilon) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t) + \varepsilon h(t), q'(t) + \varepsilon h'(t), t) dt.$$

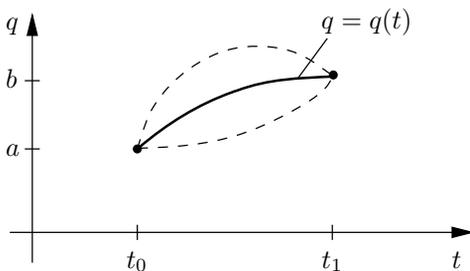


Abb. 5.1

(i) Ist $q = q(t)$ eine Lösung des Minimumproblems (5.1), dann besitzt die Funktion $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum, d. h., es gilt

$$\varphi'(0) = 0.$$

(5.6)

(ii) Das Problem (5.2) bedeutet definitionsgemäß, dass die Funktion $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ in $\varepsilon = 0$ einen kritischen Punkt besitzt. Daraus folgt wiederum (5.6).

Aus (5.6) erhält man die Euler-Lagrangesche Gleichung. Das wird in 14.5.1 im Handbuch ausführlich bewiesen.

Wir setzen

$$J(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt$$

und

$$\|q\|_k := \sum_{j=0}^k \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |q^{(j)}(t)|$$

mit $q^0(t) := q(t)$. Dann gilt $\varphi(\varepsilon) = J(q + \varepsilon h)$. Definitionsgemäß ist die *erste Variation* des Integrals J durch $\delta J(q)h := \varphi'(0)$ gegeben. Die Gleichung (5.6) bedeutet dann

$$\delta J(q)h = 0$$

(Verschwinden der ersten Variation). In der Physik schreibt man dafür kurz $\delta J = 0$ (vgl. 14.5.1 im Handbuch). Die zweite Variation wird durch

$$\delta^2 J(q)h^2 := \varphi''(0)$$

definiert.

Die folgende Begriffsbildung ist fundamental.

Starkes und schwaches lokales Minimum: Gegeben sei eine C^1 -Funktion $q = q(t)$ auf $[t_0, t_1]$ mit $q(t_0) = a$ und $q(t_1) = b$. Definitionsgemäß ist die Funktion q genau dann ein starkes (bzw. schwaches) lokales Minimum von (5.1), wenn es eine Zahl $\eta > 0$ gibt, so dass

$$J(q_*) \geq J(q)$$

gilt für alle C^1 -Funktionen q_* auf $[t_0, t_1]$ mit $q_*(t_0) = a$, $q_*(t_1) = b$ und

$$\|q_* - q\|_k < \eta$$

für $k = 0$ (bzw. $k = 1$).

Diese Definition lässt sich in analoger Weise auf Systeme übertragen. Jedes schwache (oder starke) lokale Minimum ist eine Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen.

Erhaltungssätze: Die Euler-Lagrangesche Gleichung (5.3) für $L = L(q, q', t)$, d. h.,

$$\frac{d}{dt} L_{q'} - L_q = 0$$

lautet explizit:

$$L_{q'q'} q'' + L_{q'q} q' + L_{q't} - L_q = 0. \quad (5.7)$$

Die Größe

$$p(t) := L_{q'}(q(t), q'(t), t)$$

nennen wir (verallgemeinerten) Impuls.

(i) *Erhaltung der Energie:* Hängt die Lagrangefunktion L nicht von der Zeit t ab (Homogenität des Systems bezüglich der Zeit), dann kann (5.7) in der Gestalt

$$\frac{d}{dt}(q' L_{q'} - L) = 0$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$q'(t)p(t) - L(q(t), q'(t)) = \text{const.} \quad (5.8)$$

Die links stehende Größe entspricht in der Mechanik der Energie des Systems.

(ii) *Erhaltung des Impulses:* Hängt L nicht vom Ort q ab (Homogenität des Systems bezüglich des Orts), dann ist

$$\frac{d}{dt} L_{q'} = 0,$$

also

$$p(t) = \text{const.} \quad (5.9)$$

(iii) *Erhaltung der Geschwindigkeit:* Ist L vom Ort q und von der Zeit t unabhängig, dann gilt $L_{q'}(q'(t)) = \text{const}$ mit der Lösung

$$q'(t) = \text{const.} \quad (5.10)$$

Daraus folgt, dass die Geradenschar $q(t) = \alpha + \beta t$ Lösung von (5.7) ist.

Das Noethertheorem und die Erhaltungsgesetze in der Natur: Allgemein erhält man in der Variationsrechnung Erhaltungssätze aus Symmetrieeigenschaften der Lagrangefunktion und damit des Variationsintegrals. Das ist der Inhalt des berühmten Theorems von Emmy Noether aus dem Jahre 1918. Dieses Theorem findet man in 14.5.3 im Handbuch.

Verallgemeinerung auf Variationsprobleme mit höheren Ableitungen: Hängt die Lagrangefunktion L von Ableitungen bis zur Ordnung n ab, dann hat man die Euler-Lagrangeschen Gleichungen (5.4) durch die folgenden Relationen zu ersetzen:

$$L_{q_j} - \frac{d}{dt} L_{q'_j} + \frac{d^2}{dt^2} L_{q''_j} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} L_{q_j^{(n)}} = 0, \quad j = 1, \dots, F.$$

Im Prinzip der stationären Wirkung muss man dann die Werte von $q_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, in den Randpunkten t_0 und t_1 vorschreiben.

5.1.2 Anwendungen

Kürzeste Verbindungslinie: Das Variationsproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + q'(t)^2} dt = \min!, \quad q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b, \quad (5.11)$$

bedeutet, dass wir die kürzeste Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten (t_0, q_0) und (t_1, q_1) . bestimmen. Die Euler-Lagrangesche Gleichung $(L_{q'})' - L_q = 0$ besitzt nach (5.10) die Geradenschar

$$q(t) = \alpha + \beta t$$

als Lösung. Die freien Konstanten α und β bestimmen sich eindeutig aus den Randbedingungen $q(t_0) = a$ und $q(t_1) = b$.

Satz: Eine Lösung von (5.11) muss die Gestalt

$$q(t) = a + \frac{b - a}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

besitzen. Das sind Geraden.

Lichtstrahlen in der geometrischen Optik (Fermatsches Prinzip): Das Variationsproblem

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y(x))}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \min!,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

(5.12)

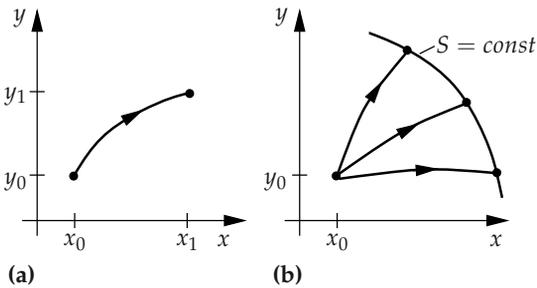


Abb. 5.2

stellt das *Grundproblem der geometrischen Optik* dar. Dabei ist $y = y(x)$ die Bahnkurve eines Lichtstrahls (c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $n(x, y)$ Brechungsindex im Punkt (x, y)). Das in (5.12) links stehende Integral ist gleich der Zeit, die das Licht in dem brechenden Medium benötigt, um vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) zu gelangen (Abb. 5.2a). Somit stellt (5.12) das Prinzip von Fermat (1601–1665) dar:

Lichtstrahlen bewegen sich so zwischen zwei Punkten, dass sie die kürzeste Zeit benötigen.

Die zu (5.12) gehörigen Euler-Lagrangeschen Gleichungen sind die *Grundgleichungen der geometrischen Optik*:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{n(x, y(x)) y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) - n_y(x, y) \sqrt{1 + y'(x)^2} = 0.$$

(5.13)

Spezialfall: Hängt der Brechungsindex $n = n(y)$ nicht von der Ortsvariablen x ab, dann folgt nach (5.8) aus der Gleichung (5.13) die Beziehung

$$\frac{n(y(x))}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \text{const.} \quad (5.14)$$

Das Eikonal S und Wellenfronten: Wir fixieren den Punkt (x_0, y_0) und setzen

$$S(x_1, y_1) := \int_{x_0}^{x_1} \frac{n(x, y)}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Dabei ist $y = y(x)$ die Lösung des Variationsproblems (5.12), d. h., $S(x_1, y_1)$ entspricht der Zeit, die das Licht benötigt, um vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) zu gelangen.

Die Funktion S heißt Eikonal und genügt der *Eikonalgleichung*

$$\boxed{S_x(x, y)^2 + S_y(x, y)^2 = \frac{n(x, y)^2}{c^2}}, \quad (5.15)$$

die einen Spezialfall der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung darstellt (vgl. 5.1.3).

Die durch die Gleichung

$$S(x, y) = \text{const}$$

bestimmten Kurven $y = w(x)$ heißen *Wellenfronten*. Sie bestehen aus den Punkten, die vom festen Ausgangspunkt (x_0, y_0) durch Lichtstrahlen in der gleichen Zeit erreicht werden können (Abb. 5.2b).

Transversalität: Alle vom Punkt (x_0, y_0) ausgehenden Lichtstrahlen schneiden die Wellenfront transversal (d. h., der Schnittwinkel ist ein rechter Winkel).

► **BEISPIEL:** Gilt $n(x, y) \equiv 1$ für den Brechungsindex, dann sind die Lichtstrahlen nach (5.14) Geraden. Die Wellenfronten sind hier Kreise (Abb. 5.3).

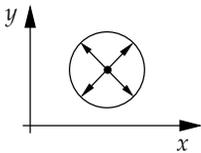


Abb. 5.3

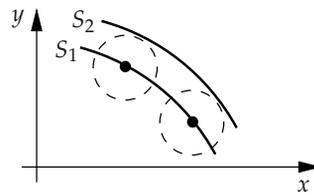


Abb. 5.4

Das Prinzip von Huygens (1629–1695) (Abb. 5.4): Betrachtet man eine Wellenfront

$$S(x, w_1(x)) = S_1$$

und lässt man von jedem Punkt dieser Wellenfront Lichtstrahlen starten, dann erreichen diese nach der Zeit t eine zweite Wellenfront

$$S(x, w_2(x)) = S_2$$

mit $S_2 := S_1 + t$. Diese zweite Wellenfront kann man als Einhüllende von „Elementarwellen“ erhalten. Das sind diejenigen Wellenfronten, die von einem festen Punkt nach Ablauf der Zeit t erzeugt werden.

Nichteuklidische hyperbolische Geometrie und Lichtstrahlen: Das Variationsproblem

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y} dx = \min!, \quad (5.16)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

erlaubt zwei Interpretationen.

(i) Im Rahmen der geometrischen Optik beschreibt (5.16) die Bewegung von Lichtstrahlen in einem Medium mit dem Brechungsindex $n = 1/y$. Aus (5.14) ergibt sich, dass die Lichtstrahlen die Gestalt

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \quad (5.17)$$

besitzen. Das sind Kreise mit dem Mittelpunkt auf der x -Achse (Abb. 5.5).

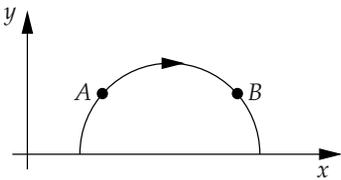


Abb. 5.5

(ii) Wir führen auf der oberen Halbebene die Metrik

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

ein. Wegen

$$\int ds = \int \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y} dx$$

stellt (5.16) das Problem der kürzesten Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten $A(x_0, y_0)$ und $B(x_1, y_1)$ dar. Die Kreise (5.17) sind die „Geraden“ dieser Geometrie, die mit der nichteuklidischen hyperbolischen Geometrie des Poincaré-Modells identisch ist (vgl. 3.2.8).

Das berühmte Brachystochronenproblem von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1696: Im Juniheft der Leipziger Acta Eruditorum (Zeitschrift der Gelehrten) veröffentlichte Johann Bernoulli das folgende Problem. *Gesucht wird die Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit vom Punkt A zum Punkt B bewegt* (Abb. 5.6).

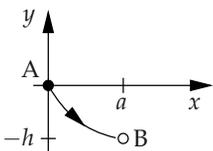


Abb. 5.6

Dieses Problem markiert den Beginn der Variationsrechnung. Bernoulli stand noch nicht die Euler-Lagrangische Gleichung zur Verfügung, die wir jetzt benutzen werden.

Lösung: Das Variationsproblem lautet

$$\int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{-y}} dx = \min!, \quad (5.18)$$

$$y(0) = 0, \quad y(a) = -h.$$

Die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung (5.14) ergibt die Lösung

$$x = C(u - \sin u), \quad y = C(\cos u - 1), \quad 0 \leq u \leq u_0,$$

wobei die Konstanten C und u_0 aus der Bedingung $y(a) = -h$ zu bestimmen sind. Das ist ein *Zykloidenbogen*.

Das Fallgesetz für einen Stein: Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = \text{kinetische Energie minus potentielle Energie}$$

$$= \frac{1}{2} m y'^2 - mgy$$

(m Masse des Steins, g Schwerebeschleunigung). Daraus ergibt sich die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$m y'' + mg = 0$$

mit der Lösung $y(t)$ für die Höhe des Steins zur Zeit t :

$$y(t) = h - vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Dabei ist h die Höhe und v die Geschwindigkeit des Steins zur Anfangszeit $t = 0$. Das ist das *Fallgesetz* von Galilei (1564–1642).

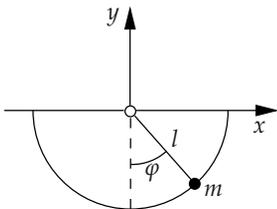


Abb. 5.7 Kreispendel

Das Kreispendel und die Methode der dem Problem angepassten Koordinaten von Lagrange (Abb. 5.7): Für die Bewegung $x = x(t)$, $y = y(t)$ eines Kreispendels im Schwerfeld der Erde in kartesischen Koordinaten lautet die Lagrangefunktion:

$$L = \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie}$$

$$= \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2) - mgy.$$

Bei dem zugehörigen Variationsproblem ist jedoch die Nebenbedingung

$$x(t)^2 + y(t)^2 = l^2$$

zu berücksichtigen (m Pendelmass, l Pendellänge, g Schwerebeschleunigung). Bei diesem Zugang muss man die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren benutzen (vgl. 5.1.6).

Die Behandlung dieses Problems wird jedoch viel einfacher, wenn man Polarkoordinaten verwendet. Dann wird die Bewegung allein durch die Winkelgleichung

$$\varphi = \varphi(t)$$

beschrieben, wobei die Nebenbedingungen völlig entfallen. Es gilt

$$x(t) = l \sin \varphi(t), \quad y(t) = -l \cos \varphi(t).$$

Wegen $x'(t) = l\varphi'(t) \cos \varphi(t)$, $y'(t) = l\varphi'(t) \sin \varphi(t)$ und $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ erhalten wir für die Lagrangefunktion den Ausdruck

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \varphi'^2 + mgl \cos \varphi.$$

Die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt} L_{\varphi'} - L_{\varphi} = 0$$

ergibt

$$\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

mit $\omega^2 = g/l$. Ist φ_0 der maximale Ausschlag des Pendels ($0 < \varphi_0 < \pi$), dann ergibt sich die Bewegung $\varphi = \varphi(t)$ aus der Gleichung

$$2\omega t = \int_0^{\varphi} \frac{d\xi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\xi}{2}}}$$

mit $k = \sin \frac{\varphi_0}{2}$. Die Substitution $\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \psi$ liefert das elliptische Integral

$$\omega t = \int_0^{\psi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}.$$

Die Schwingungsdauer T des Pendels erhält man durch die berühmte Formel:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4) \right), \quad k \rightarrow 0.$$

Die Näherungsformel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right)$$

ist bei maximalen Amplituden φ_0 die kleiner als 70° sind, mindestens bis auf 1 Prozent richtig.

Das Kreispendel für kleine Ausschläge und der harmonische Oszillator: Für kleine Ausschläge φ des Pendels gilt $\cos \varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \dots$. Bis auf eine unwesentliche Konstante lautet dann die Lagrangefunktion näherungsweise

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} mgl \varphi^2.$$

Das zugehörige Variationsproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \text{stationär!},$$

$$\varphi(t_0) = a, \quad \varphi(t_1) = b,$$

führt auf die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0$$

mit $\omega^2 = g/l$ und der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

wobei die maximale Amplitude φ_0 und die Phase α aus den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \beta$ und $\varphi'(0) = \gamma$ folgen. Für die Schwingungsdauer ergibt sich jetzt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Weitere wichtige Variationsprobleme der Geometrie und Physik:

- (i) Minimalflächen (vgl. 5.2.2 und 18.12 im Handbuch).
- (ii) Kapillarflächen und Raumfahrtexperimente (vgl. 18.12 im Handbuch).
- (iii) Stringtheorie und Elementarteilchen (vgl. 18.13 im Handbuch).
- (iv) Geodätische Linien in der Riemannschen Geometrie (vgl. 16.2.5 im Handbuch).
- (v) Nichtlineare Elastizitätstheorie (vgl. 14.6 im Handbuch).
- (vi) Balkenbiegung und Bifurkation (vgl. 14.6.5 im Handbuch).
- (vii) Nichtlineare stationäre Erhaltungsgleichungen der Rheologie für sehr zähe Flüssigkeiten und plastische Materialien (vgl. 14.5.4 im Handbuch).

- (viii) Bewegung eines Teilchens in der Einsteinschen speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie (vgl. 16.5.2 im Handbuch).
- (ix) Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für das Gravitationsfeld (vgl. 16.5.2 im Handbuch).
- (x) Die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik (vgl. 10.2.9 im Handbuch).
- (xi) Quantenelektrodynamik für Elektronen, Positronen und Photonen (vgl. 14.8 im Handbuch).
- (xii) Eichfeldtheorie und Elementarteilchen (vgl. 14.8 im Handbuch).

5.1.3 Die Hamiltonschen Gleichungen

Es liegt im Wesen der Mathematik, dass jeder wirkliche Fortschritt stets Hand in Hand geht mit der Auffindung schärferer Hilfsmittel und einfacherer Methoden... Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens.

David Hilbert
Pariser Vortrag, 1900

Im Anschluss an die Arbeiten von Euler und Lagrange im 18. Jahrhundert hatte Hamilton (1805–1865) die geniale Idee, die Methoden der geometrischen Optik auf die Lagrangesche Mechanik zu übertragen. Das führt zu dem folgenden Schema:

Lichtstrahlen	→ Bahnkurven von Teilchen, Hamiltonsche kanonische Gleichungen
Eikonal S	→ Wirkungsfunktion S
Eikonalgleichung und Wellenfronten	→ Hamilton–Jacobische Differentialgleichung
Fermatsches Prinzip	→ Hamiltonsches Prinzip der stationären Wirkung.

Die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden durch ein neues System erster Ordnung ersetzt,

die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

Dadurch wird es möglich, auf die klassische Mechanik den Apparat der Theorie dynamischer Systeme auf Mannigfaltigkeiten (Phasenräumen) anzuwenden. Es zeigt sich dabei, dass hinter der klassischen Mechanik eine Geometrie steht, die sogenannte symplektische Geometrie (vgl. 1.13.1.7 und 15.6 im Handbuch). Ende des 19. Jahrhunderts erkannte Gibbs (1839–1903), dass man die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik bequem benutzen kann, um Systeme mit großer Teilchenzahl (z. B. Gase) im Rahmen der statistischen Physik zu behandeln. Ausgangspunkt ist dabei die aus der symplektischen Geometrie resultierende Tatsache, dass die Hamiltonsche Strömung das Phasenraumvolumen invariant lässt (Satz von Liouville).

Die Wirkung als fundamentale Größe in der Natur : Unter Wirkung versteht man eine physikalische Größe, die die Dimension

Wirkung = Energie mal Zeit

besitzt. Im Jahre 1900 formulierte Max Planck (1858–1947) seine epochale Quantenhypothese, wonach die Wirkungen in unserer Welt nicht beliebig klein sein können. Die kleinste Einheit der

Wirkung ist das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{Js.}$$

Das war der Schlüssel zur Schaffung der Quantentheorie, die neben der Einsteinschen Relativitätstheorie aus dem Jahre 1905 die Physik völlig revolutionierte (vgl. 1.13.2.11ff und 14.9 im Handbuch).

Der Hamiltonsche Formalismus stellt eine fundamentale Formulierung physikalischer Gesetze dar, die der *Ausbreitung von Wirkung* in unserer Welt besonders gut angepasst ist. Die Fruchtbarkeit dieses Formalismus zeigt sich darin, dass man ihn zur Quantisierung von klassischen Feldtheorien im Rahmen der Quantenmechanik und allgemeiner im Rahmen der Quantenfeldtheorie benutzen kann (kanonische Quantisierung oder Feynmansche Quantisierung unter Verwendung des Pfadintegrals).

Der tiefere Sinn der Mechanik wird erst deutlich, wenn man nach Hamilton Ort und Impuls als Einheit auffasst und die Ausbreitung der Wirkung studiert.

Das enge Verhältnis zwischen Ort und Impuls wird in der Quantenmechanik besonders deutlich. Danach kann man Ort q und Impuls p nicht gleichzeitig genau messen. Die Dispersionen Δq und Δp genügen vielmehr der Ungleichung

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

(Heisenbergsche Unschärferelation). Dabei setzen wir $\hbar := h/2\pi$.

Zusammenhang mit der modernen Steuerungstheorie: Die Hamiltonsche Mechanik war zugleich in den Jahren um 1960 das Vorbild für die Schaffung der optimalen Steuerungstheorie auf der Basis des Pontrjaginschen Maximumprinzips (vgl. 5.3.3).

Im Folgenden beschreiben wir die Bewegung von Teilchen durch eine Gleichung der Form

$$\dot{q} = q(t)$$

mit der Zeit t und den Lagekoordinaten $q = (q_1, \dots, q_F)$. Dabei heißt F die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Die Koordinaten q_j sind in der Regel keine kartesischen Koordinaten, sondern dem Problem angepasste Koordinaten (z. B. der Auslenkungswinkel φ beim Kreispendedel; vgl. Abb. 5.7).

Das Hamiltonsche Prinzip der stationären Wirkung:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \text{stationär!},$$

$$q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b. \tag{5.19}$$

Dabei sind $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^F$ fest vorgegeben. Das links stehende Integral besitzt die Dimension einer Wirkung.

Euler-Lagrangesche Gleichungen: Für eine hinreichend reguläre Situation ist das Problem (5.19) äquivalent zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} L_{q'_j}(q(t), q'(t), t) - L_{q_j}(q(t), q'(t), t) = 0, \quad j = 1, \dots, F. \quad (5.20)$$

Legendretransformation: Wir führen neue Variable

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial q'_j}(q, q', t), \quad j = 1, \dots, F \quad (5.21)$$

ein, die wir *verallgemeinerte Impulse* nennen. Ferner setzen wir voraus, dass wir die Gleichung (5.21) nach q' auflösen können.⁶

$$q' = q'(q, p, t).$$

Anstelle der Lagrangefunktion L , wird die Hamiltonsche Funktion $H = H(q, p, t)$ benutzt:

$$H(q, p, t) := \sum_{j=1}^F q'_j p_j - L(q, q', t).$$

Dabei ist q' durch $q'(q, p, t)$ zu ersetzen. Die Transformation

$$\begin{aligned} (q, q', t) &\mapsto (q, p, t), \\ \text{Lagrangefunktion } L &\mapsto \text{Hamiltonfunktion } H \end{aligned} \quad (5.22)$$

heißt *Legendretransformation*. Wir bezeichnen den F -dimensionalen q -Raum M als Konfigurationsraum und den $2F$ -dimensionalen (q, p) -Raum als *Phasenraum*. Wir fassen dabei M als eine offene Menge des \mathbb{R}^F und den Phasenraum als eine offene Menge des \mathbb{R}^{2F} auf. Die volle Kraft der Theorie kommt erst zum Tragen, wenn man die Sprache der Mannigfaltigkeiten benutzt.⁷

Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen: Aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen folgt durch die Legendretransformation das neue System erster Ordnung⁸

$$p'_j = -H_{q_j}, \quad q'_j = H_{p_j}, \quad j = 1, \dots, F. \quad (5.23)$$

⁶Ist die strenge Legendrebedingung

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q'_j \partial q'_k}(q_0, q'_0, t_0) \right) > 0$$

erfüllt, dann lässt sich (5.21) nach dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung von (q_0, q'_0, t_0) eindeutig nach q' auflösen.

⁷Dann ist M eine reelle F -dimensionale Mannigfaltigkeit, und der Phasenraum entspricht dem Kotangentialbündel T^*M von M . Die tiefere Bedeutung der Legendretransformation besteht darin, dass sie einen Übergang vom Tangentialbündel TM der Konfigurationsmannigfaltigkeit M zum Kotangentialbündel T^*M bewirkt und T^*M eine natürliche symplektische Struktur trägt (vgl. 15.6 im Handbuch).

⁸Ausführlich geschrieben lautet (5.23):

$$p'_j(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q(t), p(t), t), \quad q'_j(t) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q(t), p(t), t).$$

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung:

$$S_t(q, t) + H(q, S_q(q, t), t) = 0. \quad (5.24)$$

Zwischen dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.23) und der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (5.24) besteht ein enger Zusammenhang.

- (i) Aus einer mehrparametrischen Lösung von (5.24) kann man Lösungen von (5.23) aufbauen.
- (ii) Umgekehrt erhält man aus Lösungsscharen von (5.23) Lösungen von (5.24).

Das findet man in 1.13.1.3 In der geometrischen Optik steht hinter (i) die Konstruktion von Lichtstrahlen aus Wellenfronten, während (ii) dem Aufbau von Wellenfronten aus Scharen von Lichtstrahlen entspricht.

Die Hamiltonsche Strömung: Wir nehmen an, dass die Hamiltonfunktion H nicht von der Zeit t abhängt, und interpretieren die Lösungen

$$q = q(t), \quad p = p(t) \quad (5.25)$$

der kanonischen Gleichungen als Bahnkurven der Flüssigkeitsteilchen einer Strömung (Abb. 5.8).

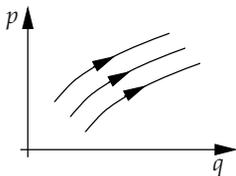


Abb. 5.8 Hamiltonsche Strömung im Phasenraum

(i) *Erhaltung der Energie:* Die Funktion H ist eine Erhaltungsgröße der Hamiltonschen Strömung, d. h., es gilt

$$H(q(t), p(t)) = \text{const.}$$

Die Funktion H besitzt die Bedeutung der Energie des Systems.

(ii) *Erhaltung des Phasenvolumens (Satz von Liouville):* Die Hamiltonsche Strömung ist volumen-treu.⁹

Somit verhält sich die Hamiltonsche Strömung wie eine inkompressible Flüssigkeit.

Die Bedeutung der Wirkungsfunktion S : Wir fixieren einen Punkt q_* zur Zeit t_0 und setzen

$$S(q_{**}, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt.$$

Im Integranden wählen wir eine Lösung $q = q(t)$ der Euler-Lagrangeschen Gleichung (5.20), die den Randbedingungen

$$q(t_0) = q_*, \quad q(t_1) = q_{**}$$

genügt. Wir nehmen an, dass diese Lösung eindeutig bestimmt ist.

⁹Die Flüssigkeitsteilchen eines Gebiets G_0 zur Zeit $t = 0$ befinden sich zur Zeit t in einem Gebiet G_t , welches das gleiche Volumen wie G_0 besitzt.

Satz: Liegt eine hinreichend reguläre Situation vor, dann ist die Wirkungsfunktion S eine Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung (5.24).

Irreguläre Situationen entsprechen in der geometrischen Optik dem Schneiden oder Berühren von Wellenfronten (Kaustiken).

Poissonklammern und Erhaltungsgrößen: Sind $A = A(q, p, t)$ und $B = B(q, p, t)$ Funktionen, dann definieren wir die Poissonklammer durch

$$\{A, B\} := \sum_{j=1}^F A_{p_j} B_{q_j} - A_{q_j} B_{p_j}.$$

Es gilt

$$\{A, B\} = -\{B, A\},$$

also speziell $\{A, A\} = 0$. Ferner hat man die Jacobi-Identität

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

Liealgebra: Die reellen C^∞ -Funktionen $A = A(q, p)$ bilden auf dem Phasenraum bezüglich der Addition, der Multiplikation mit reellen Zahlen und bezüglich der Poissonklammer $\{A, B\}$ eine unendlichdimensionale Liealgebra.

Poissonsche Bewegungsgleichung: Entlang der Bahnkurven (5.25) einer Hamiltonschen Strömung gilt für jede hinreichend glatte Funktion $A = A(q, p, t)$ die Beziehung¹⁰

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\} + A_t. \quad (5.26)$$

Satz: Hängt A nicht von t ab und gilt $\{H, A\} = 0$, dann ist A eine Erhaltungsgröße, d. h., man hat

$$A(q(t), p(t)) = \text{const}$$

entlang der Bahnkurven der Hamiltonschen Strömung.

► **BEISPIEL 1:** Hängt die Hamiltonfunktion $H = H(q, p)$ nicht von der Zeit ab, dann ist H eine Erhaltungsgröße der Hamiltonschen Strömung. Das ergibt sich aus der trivialen Beziehung $\{H, H\} = 0$.

► **BEISPIEL 2:** Für die Poissonklammern zwischen Ort und Impuls gilt

$$\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad \{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, p_k\} = 0. \quad (5.27)$$

Aus (5.26) folgt ferner

$$q'_j = \{H, q_j\}, \quad p'_j = \{H, p_j\}, \quad j = 1, \dots, F. \quad (5.28)$$

Das sind die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

¹⁰Explizit entspricht das der Gleichung

$$\frac{d}{dt} A(q(t), p(t), t) = \{A, H\}(q(t), p(t), t) + A_t(q(t), p(t), t).$$

Die quasiklassische Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld (1913):

$$\text{Der } (q, p)\text{-Phasenraum besteht aus Zellen der Größe } h^F. \quad (5.29)$$

Diese Regel wird dadurch motiviert, dass $\Delta q \Delta p$ die Dimension einer Wirkung hat und das Plancksche Wirkungsquantum h die kleinste Einheit der Wirkung darstellt.

Heisenbergklammern: Für lineare Operatoren A und B definieren wir

$$[A, B]_{\mathcal{H}} := \frac{\hbar}{i}(AB - BA).$$

Die fundamentale Quantisierungsregel von Heisenberg (1924):

Ein klassisches mechanisches System wird quantisiert, indem man die Ortsvariablen q_j und die Impulsvariablen p_j zu Operatoren werden lässt und die Poissonklammern durch Heisenbergklammern ersetzt.

Um eine derartig allgemeine Quantisierungsregel hatten die Physiker seit Plancks Quantenhypothese im Jahre 1900 lange Zeit gerungen. Aus (5.27) und (5.28) folgen die Grundgleichungen der Heisenbergschen Quantenmechanik:

$$\begin{aligned} p'_j &= [H, p_j]_{\mathcal{H}}, & q'_j &= [H, q_j]_{\mathcal{H}}, & j, k &= 1, \dots, F, \\ [p_j, q_k]_{\mathcal{H}} &= \delta_{jk}, & [p_j, p_k]_{\mathcal{H}} &= [q_j, q_k]_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Im Jahre 1925 entdeckte Schrödinger eine scheinbar völlig andersartige Quantisierungsregel, die auf eine partielle Differentialgleichung führt – die Schrödingergleichung (vgl. 1.13.2.11). Tatsächlich kann man jedoch zeigen, dass die beiden Quantenmechaniken von Heisenberg und Schrödinger äquivalent sind. Sie stellen zwei Realisierungen der gleichen abstrakten Theorie in einem Hilbertraum dar.

5.1.4 Anwendungen

Eindimensionale Bewegungen: Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung $q = q(t)$ eines Teilchens mit der Masse m auf der q -Achse (Abb. 5.9). Ist $U = U(q)$ seine potentielle Energie, dann lautet die Lagrangefunktion:

$$L = \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} = \frac{mq'^2}{2} - U(q).$$

Das Prinzip der stationären Wirkung

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \text{stationär!},$$

$$q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b$$

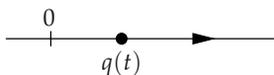


Abb. 5.9

führt auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung $(L_{q'})' - L_q = 0$, also

$$\boxed{mq'' = -U'(q)}. \quad (5.31)$$

Das ist gleichzeitig die *Newtonsche Bewegungsgleichung* mit der Kraft $K(q) = -U'(q)$. Wir setzen

$$p := L_{q'}(q, q') \quad \text{und} \quad E := q'p - L.$$

Dann ist $p = mq'$ der klassische Impuls (Masse mal Geschwindigkeit).

(i) *Energieerhaltung*: Die Größe

$$E = \frac{1}{2}mq'^2 + U(q)$$

stimmt mit der klassischen Energie überein (kinetische Energie plus potentielle Energie). Nach (5.8) ist E eine Erhaltungsgröße, d. h., es gilt

$$\frac{1}{2}mq'(t)^2 + U(q(t)) = \text{const}$$

längs jeder Bewegung (Lösung von (5.31)).

(ii) *Legendretransformation*: Die Hamiltonfunktion $H = H(q, p)$ ergibt sich durch $H(q, p) := q'p - L$, also

$$H(p, q) := \frac{p^2}{2m} + U(q).$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der Energie E .

(iii) *Kanonische Gleichungen*:

$$\boxed{p' = -H_q, \quad q' = H_p.}$$

Diese Gleichungen entsprechen $q' = p/m$ und der Newtonschen Bewegungsgleichung $mq'' = -U'(q)$.

Anwendung auf den harmonischen Oszillator: Der harmonische Oszillator stellt das einfachste nichttriviale mathematische Modell der Mechanik dar. Dieses Modell erlaubt jedoch bereits weitreichende physikalische Schlussfolgerungen. Zum Beispiel ergibt sich aus der Quantisierung des harmonischen Oszillators die Einsteinsche Photonentheorie und damit das Plancksche Strahlungsgesetz, das wesentlich für die Entwicklung unseres Kosmos nach dem Urknall verantwortlich ist (vgl. [Zeidler 1990, Vol.4]).

Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Es werden nur kleine Auslenkungen betrachtet.
- (b) Bei verschwindender Auslenkung tritt keine Kraft auf.
- (c) Die potentielle Energie ist positiv.

Taylorentwicklung ergibt

$$U(q) = U(0) + U'(0)q + \frac{U''(0)}{2}q^2 + \dots$$

Aus (b) folgt $0 = K(0) = -U'(0)$. Da die Konstante $U(0)$ wegen $K(q) = -U'(q)$ für die Kraft und somit für die Bewegungsgleichung $mq'' = K$ keine Rolle spielt, setzen wir $U'(0) := 0$. Damit erhalten wir die potentielle Energie des sogenannten harmonischen Oszillators:

$$U(q) = \frac{kq^2}{2}$$

mit $k := U''(0) > 0$.

(iv) *Newtonsche Bewegungsgleichung*: Aus (5.31) folgt:

$$\begin{aligned} q'' + \omega^2 q &= 0, \\ q(0) &= q_0 \quad (\text{Anfangslage}), \quad q'(0) = q_1 \quad (\text{Anfangsgeschwindigkeit}) \end{aligned}$$

mit $\omega := \sqrt{k/m}$. Die eindeutige Lösung lautet:

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{q_1}{\omega} \sin \omega t.$$

(v) *Die Hamiltonsche Strömung im Phasenraum*: Die Hamiltonsche Funktion (Energiefunktion) lautet:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}.$$

Daraus ergeben sich die kanonischen Gleichungen $p' = -H_q$, $q' = H_p$, d. h.,

$$p' = -kq, \quad q' = \frac{p}{m}.$$

Die zugehörigen Lösungskurven

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m} \sin \omega t, \\ p(t) &= -q_0 m \omega \sin \omega t + p_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

beschreiben die Bahnkurven der Hamiltonschen Strömung im (q, p) -Phasenraum ($p_0 := q_1/m$). Wegen der Energieerhaltung gilt

$$\frac{p(t)^2}{2m} + \frac{\omega^2 m q(t)^2}{2} = E,$$

d. h., die Bahnkurven sind Ellipsen, die mit wachsender Energie E immer größer werden (Abb. 5.10a).

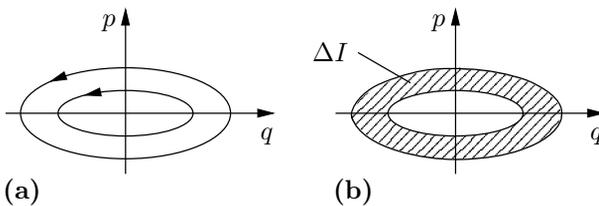


Abb. 5.10

(vi) *Wirkungsvariable I und Winkelvariable φ* : Wir definieren

$$I := \frac{1}{2\pi} \quad (\text{Flächeninhalt der Ellipse im } (q, p) \text{ Phasenraum zur Energie } E).$$

Dann gilt

$$I = \frac{E}{\omega}.$$

Folglich lautet die Hamiltonfunktion $H = \frac{\omega I}{2\pi}$. Dann genügen $I = \text{const}$ und $\varphi := \omega t$ neuen Hamiltonschen Gleichungen

$$\varphi' = H_I, \quad I' = -H_\varphi.$$

(vii) *Die Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld (1913)*: Danach besteht der Flächeninhalt des (q, p) -Phasenraumes aus Zellen der Größe h . Betrachten wir zwei Bahnkurven zu den Energien E_2 und E_1 mit $E_2 > E_1$, dann gilt für den Flächeninhalt zwischen den beiden Ellipsen die Beziehung

$$2\pi I_2 - 2\pi I_1 = h$$

(Abb. 5.10b). Setzen wir $\Delta E = E_2 - E_1$, dann erhalten wir die Gleichung

$$\Delta E = \hbar\omega.$$

Das ist die berühmte Quantenhypothese von Planck aus dem Jahre 1900.

Einstein postulierte 1905, dass das Licht aus Quanten besteht, die er Photonen nannte. Für Licht der Frequenz ν und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ ist die Energie eines Photons nach Einstein durch

$$\varepsilon = \hbar\omega$$

gegeben. Für seine Photonentheorie des Lichts erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis für Physik (und interessanterweise nicht für seine spezielle und allgemeine Relativitätstheorie).

(viii) *Die Quantisierungsregel von Heisenberg (1924)*: Mit seinem Kalkül berechnete Heisenberg die exakten Energieniveaus des gequantelten harmonischen Oszillators:

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

Wir zeigen in 1.13.2.12, wie sich (5.32) aus der Schrödingergleichung ergibt.

Interessanterweise entspricht der Grundzustand $n = 0$ einer nichtverschwindenden $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Diese Tatsache ist fundamental für die Quantenfeldtheorie. Sie führt dazu, dass der Grundzustand eines Quantenfeldes eine unendlich große Energie besitzt. Durch spontane Übergänge von Teilchen aus dem Grundzustand in angeregte Zustände ergeben sich interessante Phänomene, wie zum Beispiel das Verdampfen schwarzer Löcher im Kosmos.

5.1.5 Hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum

Neben dem Minimumproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \min!, \quad (5.33)$$

$$q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b,$$

für die gesuchte reelle Funktion $q = q(t)$ betrachten wir die Euler-Lagrangesche Gleichung

$$\frac{d}{dt} L_{q'} - L_q = 0 \quad (5.34)$$

und das *Jacobische Eigenwertproblem*

$$\begin{aligned} -(Rh')' + Ph &= \lambda h, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ h(t_0) &= h(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

mit $Q := (q(t), q'(t), t)$ und

$$R(t) := L_{q'q'}(Q), \quad P(t) := L_{qq}(Q) - \frac{d}{dt} L_{qq'}(Q).$$

Ferner betrachten wir das Jacobische Anfangswertproblem

$$\boxed{\begin{aligned} -(Rh')' + Ph &= 0, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ h(t_0) &= 0, & h'(t_0) = 1. \end{aligned}} \quad (5.36)$$

Die kleinste Nullstelle t_* der Lösung $h = h(t)$ von (5.36) mit $t_* > t_0$ heißt *konjugierter Punkt* zu t_0 .

Die reelle Zahl λ ist definitionsgemäß genau dann ein Eigenwert von (5.35), wenn diese Gleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung h besitzt.

Glatttheit: Wir setzen voraus, dass die Lagrangefunktion L hinreichend glatt ist (z. B. vom Typ C^3).

Extremalen: Jede C^2 -Lösung der Euler-Lagrangeschen Gleichung (5.34) heißt Extremale. Eine Extremale muss nicht einem lokalen Minimum in (5.33) entsprechen. Hierzu bedarf es zusätzlicher Bedingungen.

Die Weierstraßsche E-Funktion: Diese Funktion wird durch

$$\boxed{E(q, q', u, t) := L(q, u, t) - L(q, q', t) - (u - q')L_{q'}(q, q', t)}$$

definiert.

Konvexität der Lagrangefunktion: Eine besondere Rolle spielt die Konvexität von L bezüglich q' . Diese Eigenschaft von L liegt vor, falls eine der folgenden beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $L_{q'q'}(q, q', t) \geq 0$ für alle $q, q' \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [t_0, t_1]$.
- (ii) $E(q, q', u, t) \geq 0$ für alle $q, q', u \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [t_0, t_1]$.

5.1.5.1 Die hinreichende Bedingung von Jacobi

Notwendige Bedingung von Legendre (1788): Stellt die C^2 -Funktion $q = q(t)$ ein schwaches lokales Minimum von (5.33) dar, dann genügt sie der *Legendrebedingung*

$$\boxed{L_{q'q'}(q(t), q'(t), t) \geq 0} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Bedingung von Jacobi (1837): Es sei $q = q(t)$ eine Extremale mit $q(t_0) = a$ und $q(t_1) = b$, die der strengen Legendrebedingung

$$\boxed{L_{q'q'}(q(t), q'(t), t) > 0} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1]$$

genügt. Dann ist q ein schwaches lokales Minimum von (5.33), falls eine der beiden zusätzlichen Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Alle Eigenwerte λ der Jacobischen Eigenwertgleichung (5.35) sind positiv.
- (ii) Die Lösung h des Jacobischen Anfangswertproblems (5.36) enthält keine Nullstellen auf dem Intervall $]t_0, t_1[$, d. h., dieses Intervall enthält keine zu t_0 konjugierten Punkte.

► **BEISPIEL:** (a) Die Funktion $q(t) \equiv 0$ ist ein schwaches lokales Minimum des Problems der kürzesten Verbindungslinie (Abb. 5.12):

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + q'(t)^2} dt = \min!, \tag{5.37}$$

$$q(t_0) = q(t_1) = 0.$$

(b) Die Gerade $q(t) \equiv 0$ ist ein globales Minimum von (5.37).

Beweis von (a): Es gilt $L = \sqrt{1 + q'^2}$. Daraus folgt

$$L_{q'q'} = \frac{1}{\sqrt{(1 + q'^2)^3}} \geq 0, \quad L_{qq'} = L_{q'q} = 0.$$

Das Jacobische Anfangswertproblem

$$-h'' = 0 \quad \text{auf} \quad [t_0, t_1], \quad h(t_0) = 0, \quad h'(t_0) = 1$$

besitzt die Lösung $h(t) = t - t_0$, die außer t_0 keine weitere Nullstelle hat.

Das Jacobische Eigenwertproblem

$$-h'' = \lambda h \quad \text{auf} \quad [t_0, t_1], \quad h(t_0) = h(t_1) = 0$$

besitzt die Eigenlösungen

$$h(t) = \sin \frac{n\pi(t - t_0)}{t_1 - t_0}, \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{(t_1 - t_0)^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

d. h., alle Eigenwerte λ sind positiv.

Beweis von (b): Wir betten die Extremale $q(t) \equiv 0$ in die Extremalenschar $q(t) = \text{const}$ ein. Da die Lagrangefunktion L wegen $L_{q'q'} \geq 0$ konvex bezüglich q' ist, folgt die Aussage aus dem nächsten Abschnitt 5.1.5.2 □

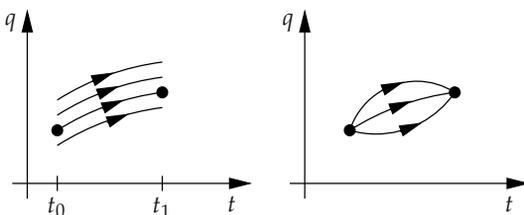
5.1.5.2 Die hinreichende Bedingung von Weierstraß

Gegeben sei eine glatte Extremalenschar

$$q = q(t, \alpha),$$

mit dem reellen Parameter α , die ein Gebiet G des (t, q) -Raumes in regulärer Weise überdeckt, d. h., es gibt keine Schnitt- oder Berührungspunkte.

(i) Diese Schar soll eine Extremale q_* enthalten, die durch die Punkte (t_0, a) und (t_1, b) geht (Abb. 5.11a).



(a)

(b)

Abb. 5.11

(ii) Die Lagrangefunktion L sei bezüglich q' konvex.

Dann ist q_* ein starkes lokales Minimum von (5.33).

Korollar: Existiert die Extremalenschar $q = q(t, \alpha)$ im gesamten (t, q) -Raum, d. h., man hat $G = \mathbb{R}^2$, dann ist q_* ein globales Minimum von (5.33).

Interpretation in der geometrischen Optik: Extremalenscharen entsprechen in der geometrischen Optik Scharen von Lichtstrahlen. Gefährlich sind Schnittpunkte (Brennpunkte) und Berührungspunkte (Kauстики) von Lichtstrahlen. Abb. 5.11b zeigt zwei Brennpunkte. Nicht jeder Lichtstrahl muss hier notwendigerweise der kürzesten zurückgelegten Zeit entsprechen.

Die Jacobische Bedingung in 5.1.5.1 kann verletzt sein, wenn eine Extremale durch zwei Brennpunkte geht, die man auch konjugierte Punkte nennt.

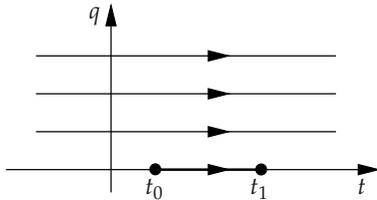


Abb. 5.12

5.1.6 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren

Es sei $q = (q_1, \dots, q_F)$. Wir betrachten das Minimumproblem

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), q'(t), t) dt = \min!, \quad (5.38)$$

$$q(t_0) = a, \quad q(t_1) = b \quad (\text{Randbedingungen})$$

zusammen mit einer der folgenden Nebenbedingungen:

(i) *Integrale Nebenbedingungen*

$$\int_{t_0}^{t_1} N_k(q(t), q'(t), t) dt = \text{const}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.39)$$

(ii) *Nebenbedingungen in Gleichungsform*

$$N_k(q(t), q'(t), t) = 0 \quad \text{auf} \quad [t_0, t_1], \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.40)$$

Die Funktionen L und N_k seien hinreichend glatt.

Die Idee der Lagrangeschen Multiplikatoren: Wir ersetzen die Lagrangefunktion L durch die modifizierte Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} := L + \sum_{k=1}^K \lambda_k(t) N_k$$

und schreiben \mathcal{L} anstelle von L in den Euler-Lagrangeschen Gleichungen:¹¹

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{q'_k} - \mathcal{L}_{q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K.} \tag{5.41}$$

Die Funktionen $\lambda_k = \lambda_k(t)$ heißen Lagrangesche Multiplikatoren. Zu bestimmen sind $q = q(t)$ und $\lambda_k = \lambda_k(t)$, $k = 1, \dots, K$ aus (5.41) und aus den Neben- und Randbedingungen.

Hauptsatz: Vorgelegt sei das Minimumproblem (5.38) mit einer der Nebenbedingungen (i) oder (ii). Gegeben sei eine C^2 -Lösung $q = q(t)$, und es liege eine nichtentartete Situation vor.¹² Dann gibt es hinreichend glatte Lagrangesche Multiplikatoren λ_k so dass (5.41) gilt.

Zusatz: Bei integralen Nebenbedingungen sind die Lagrangeschen Multiplikatoren reelle Zahlen und keine Funktionen.

5.1.7 Anwendungen

Das klassische isoperimetrische Problem der Königin Dido: Der Sage nach durfte die Königin Dido bei der Gründung von Karthago nur soviel Land in Besitz nehmen, wie von einer Stierhaut umspannt werden konnte. Die listige Königin zerschnitt die Stierhaut in dünne Streifen und bildete damit eine Kreislinie.

Satz: Unter allen zweidimensionalen Gebieten G die von einer glatten Kurve der Länge l berandet werden, besitzt der Kreis den größten Flächeninhalt.

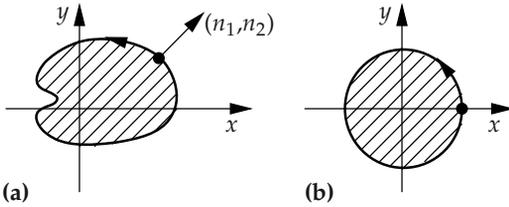


Abb. 5.13

Um diesen Satz zu motivieren, betrachten wir das Minimumproblem

$$\boxed{\begin{aligned} - \int_G dx dy &= \min! && \text{(negativer Flächeninhalt),} \\ \int_{\partial G} ds &= l && \text{(Länge der Randkurve).} \end{aligned}}$$

Wir suchen die Randkurve in der Gestalt $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (Abb. 5.13a). Dann besitzt der äußere Normaleneinheitsvektor die Komponenten

$$n_1 = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \quad n_2 = -\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

¹¹Explizit lautet diese Gleichung

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{q'_k}(q(t), q'(t), t) - \mathcal{L}_{q_k}(q(t), q'(t), t) = 0.$$

¹²Man hat gewisse Entartungsfälle auszuschließen, die jedoch bei vernünftig gestellten Aufgaben der Praxis nicht auftreten. Eine genaue Formulierung des Hauptsatzes findet man in [Zeidler 1984, Vol. III, Abschnitt 37.41].

Partielle Integration ergibt

$$2 \int_G dx dy = \int_G \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial G} (xn_1 + yn_2) ds.$$

Folglich erhalten wir das neue Problem:

$$\int_{t_0}^{t_1} (-y'(t)x(t) + x'(t)y(t)) dt = \min!,$$

$$x(t_0) = x(t_1) = R, \quad y(t_0) = y(t_1) = 0,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = l.$$

Dabei ist R ein Parameter. Für die modifizierte Lagrangefunktion $\mathcal{L} := -y'x + x'y + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ergeben sich die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{x'} - \mathcal{L}_x = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L}_y = 0,$$

d. h.,

$$2y' + \lambda \frac{d}{dx} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0, \quad -2x' + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0.$$

Für $\lambda = -2$ ist die Kreislinie $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ mit $l = 2\pi R$ eine Lösung.

Terminologie: Nach dem Vorbild von Jakob Bernoulli (1655–1705) bezeichnet man jedes Variationsproblem mit integralen Nebenbedingungen als ein isoperimetrisches Problem.

Das hängende Seil: Gesucht wird die Gestalt $y = y(x)$ eines Seils der Länge l unter dem Einfluss der Schwerkraft. Das Seil sei in den beiden Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ aufgehängt (Abb. 5.14).

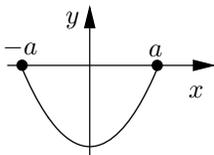


Abb. 5.14

Lösung: Das Prinzip der minimalen potentiellen Energie ergibt das folgende Variationsproblem:

$$\int_{-a}^a \rho g y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \min!,$$

$$y(-a) = y(a) = 0,$$

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l.$$

(ρ konstante Dichte des Seils g Schwerebeschleunigung). Zur Vereinfachung der Formeln setzen wir $\rho g = 1$. Die modifizierte Lagrangefunktion $\mathcal{L} := (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2}$ mit der reellen Zahl λ als Lagrangeschen Multiplikator führt auf eine Euler-Lagrangegleichung, die nach (5.8) die Beziehung

$$y' \mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L} = \text{const}$$

ergibt, also $\frac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = c$ mit der Lösungsschar

$$y = c \cosh\left(\frac{x}{c} + b\right) - \lambda.$$

Das sind Kettenlinien. Die Konstanten b, c und λ ergeben sich aus der Rand- und Nebenbedingung.

Geodätische Linien: Gesucht wird auf der Fläche $M(x, y, z) = 0$ die kürzeste Verbindungslinie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ zwischen den beiden Punkten $A(x_0, y_0, z_0)$ und $B(x_1, y_1, z_1)$ (Abb. 5.15).

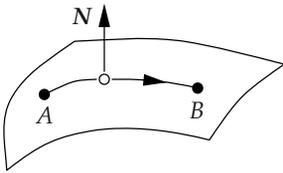


Abb. 5.15

Lösung: Das Variationsproblem lautet:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \min!,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

$$x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1, \quad z(t_1) = z_1,$$

$$M(x, y, z) = 0 \quad (\text{Nebenbedingung}).$$

Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{x'} - \mathcal{L}_x = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L}_y = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{z'} - \mathcal{L}_z = 0$$

für die modifizierte Lagrangefunktion $\mathcal{L} := \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda(t)M(x, y, z)$ lautet nach Übergang zur Bogenlänge s als Parameter:

$$\mathbf{r}''(s) = \mu(s)(\mathbf{grad} M)(\mathbf{r}(s)).$$

Dies bedeutet geometrisch, dass der Hauptnormalenvektor der Kurve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ parallel oder antiparallel zum Flächennormalenvektor \mathbf{N} liegt.

Das Kreispendel und seine Zwangskräfte (Abb. 5.16): Ist $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Bewegung eines Kreispendels der Länge l und der Masse m , dann ergibt das Prinzip der stationären Wirkung für die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie minus potentielle Energie} \\ &= \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2) - mgy \end{aligned}$$

das folgende Variationsproblem:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), y(t), x'(t), y'(t), t) dt &= \text{stationär!}, \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1, \\ x(t)^2 + y(t)^2 - l^2 &= 0 \quad (\text{Nebenbedingung}). \end{aligned}$$

Für die modifizierte Lagrangefunktion $\mathcal{L} := L - \lambda(x^2 + y^2 - l^2)$ mit der reellen Zahl λ erhalten wir die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_{x'} - \mathcal{L}_x = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{y'} - \mathcal{L}_y = 0.$$

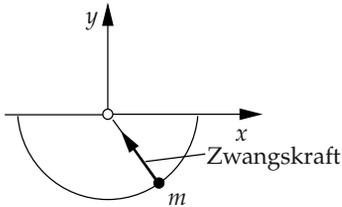


Abb. 5.16

Das ergibt

$$mx'' = -2\lambda x, \quad my'' = -mg - 2\lambda y.$$

Benutzen wir den Ortsvektor $\mathbf{r} = xi + yj$, dann erhalten wir die *Bewegungsgleichung für das Kreispendel*

$$m\mathbf{r}'' = -g\mathbf{j} - 2\lambda\mathbf{r}.$$

Dabei entspricht $-g\mathbf{j}$ der Schwerkraft, und $-2\lambda\mathbf{r}$ ist die zusätzlich wirkende *Zwangskraft*, die in (negativer) Richtung der Pendelstange wirkt und den Massenpunkt auf der Kreisbahn hält.

5.1.8 Natürliche Randbedingungen

Probleme mit freiem Endpunkt: Eine hinreichend glatte Lösung des Variationsproblems

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x), x) dx &= \min!, \\ y(x_0) &= a \end{aligned}$$

genügt der Euler-Lagrangeschen Gleichung

$$\frac{d}{dx} L_{y'} - L_y = 0 \quad (5.42)$$

und der zusätzlichen Randbedingung

$$L_{y'}(y(x_1), y'(x_1), x_1) = 0.$$

Diese Bedingung heißt *natürliche Randbedingung*, weil sie im ursprünglichen Variationsproblem nicht auftritt.

Probleme mit Endpunkt auf einer Kurve: Liegt der Endpunkt $(x_1, y(x_1))$ auf der Kurve $C: x = X(\tau), y = Y(\tau)$, dann erhalten wir das Problem:

$$\int_{x_0}^{X(\tau)} L(y(x), y'(x), x) dx = \min!,$$

$$y(x_0) = a, \quad y(X(\tau)) = Y(\tau),$$

wobei der Parameterwert τ des Schnittpunkts P der Lösungskurve $y = y(x)$ mit der gegebenen Kurve C ebenfalls gesucht wird (Abb. 5.17).

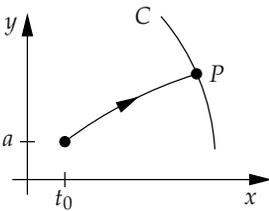


Abb. 5.17

Jede hinreichend glatte Lösung dieses Problems genügt der Euler-Lagrangeschen Gleichung (5.42) und der verallgemeinerten *Transversalitätsbedingung* im Schnittpunkt P :

$$L_{y'}(Q)Y'(\tau) + [L(Q) - L_{y'}(Q)y'(x_1)]X'(\tau) = 0. \quad (5.43)$$

Dabei sei $Q := (y(x_1), y'(x_1), x_1)$ und $x_1 := X(\tau)$.

► **BEISPIEL:** In der geometrischen Optik gilt $L = n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. Dann geht (5.43) in die Bedingung

$$y'(x_1)Y'(\tau) + X'(\tau) = 0$$

über, d. h., der Lichtstrahl schneidet die Kurve C in einem rechten Winkel. Das trifft insbesondere für eine Wellenfront C zu (Abb. 5.17).

5.2 Variationsrechnung für Funktionen mehrerer Variabler

5.2.1 Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet G des \mathbb{R}^N und eine Funktion ψ auf dem Rand ∂G . Wir betrachten das Minimumproblem

$$\boxed{\int_G L(x, q, \partial q) \, dx = \min!, \quad q = \psi \text{ auf } \partial G} \quad (5.44)$$

und das allgemeinere Problem

$$\boxed{\int_G L(x, q, \partial q) \, dx \stackrel{!}{=} \text{stationär}, \quad q = \psi \text{ auf } \partial G.} \quad (5.45)$$

Dabei setzen wir $\partial_j := \partial/\partial x_j$ und

$$x = (x_1, \dots, x_N), \quad q = (q_1, \dots, q_K), \quad \partial q = (\partial_j q_k).$$

Die Funktionen L, ψ und der Rand ∂G seien hinreichend glatt.

Hauptsatz: Ist $q = q(t)$ eine Lösung von (5.44) oder (5.45), dann genügt sie den Euler-Lagrangeschen Gleichungen auf G .¹³

$$\boxed{\sum_{j=1}^N \partial_j L_{\partial_j q_k} - L_{q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K.} \quad (5.46)$$

Diese berühmten Gleichungen wurden 1762 von Lagrange aufgestellt. Alle Feldtheorien der Physik lassen sich mit Hilfe von (5.46) formulieren, wobei (5.45) dem *Prinzip der stationären Wirkung* entspricht.

Korollar: Für hinreichend glatte Funktionen q ist Problem (5.45) äquivalent zu (5.46).

5.2.2 Anwendungen

Ebenes Problem: Eine notwendige Lösbarkeitsbedingung für das Minimumproblem

$$\boxed{\int_G L(q(x, y), q_x(x, y), q_y(x, y), x, y) \, dx \, dy = \min!, \quad q = \psi \text{ auf } \partial G} \quad (5.47)$$

¹³Ausführlich geschrieben hat man

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L(Q)}{\partial (\partial_j q_k)} - \frac{\partial L(Q)}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, K,$$

mit $Q = (x, q(x), \partial q(x))$

ist die Euler-Lagrangesche Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} L_{q_x} + \frac{\partial}{\partial y} L_{q_y} - L_q = 0. \quad (5.48)$$

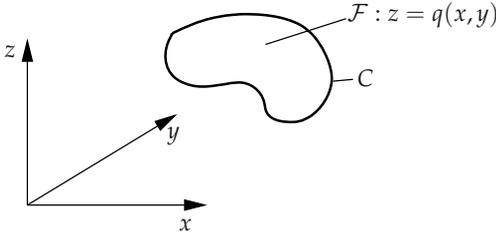


Abb. 5.18

Minimalflächen (Abb. 5.18): Gesucht wird eine Fläche $\mathcal{F} : z = q(x, y)$ mit minimaler Oberfläche, die durch eine vorgegebene Randkurve C geht. Das zugehörige Variationsproblem lautet

$$\int_G \sqrt{1 + z_x(x, y)^2 + z_y(x, y)^2} \, dx \, dy = \min!,$$

$$q = \psi \quad \text{auf} \quad \partial G$$

mit der Euler-Lagrangeschen Gleichung auf G :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x}{\sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y}{\sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2}} \right) = 0. \quad (5.49)$$

Alle Lösungen dieser Gleichung heißen Minimalflächen. Gleichung (5.49) bedeutet geometrisch, dass die mittlere Krümmung der Fläche identisch verschwindet, d. h., es ist $H \equiv 0$ auf ∂G .

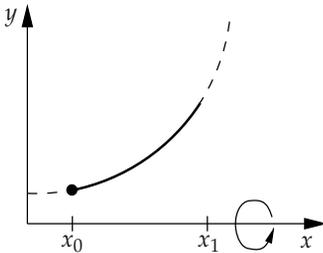


Abb. 5.19

Katenoid (Abb. 5.19): Wir lassen eine Kurve $y = y(x)$ um die x -Achse rotieren. Dabei soll eine Fläche mit kleinster Oberfläche entstehen. Das zugehörige Variationsproblem lautet

$$\int_{x_0}^{x_1} L(y(x), y'(x), x) \, dx = \min!, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

mit $L = y \sqrt{1 + y'^2}$. Nach (5.8) ergibt sich $y' L_{y'} - L = \text{const}$ aus der Euler-Lagrangeschen Gleichung, d. h., wir erhalten

$$\frac{y(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \text{const.}$$

Die Kettenlinien $y = c \cosh\left(\frac{x}{c} + b\right)$ sind Lösungen.

Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche, die durch Rotation entsteht.

Die erste Randwertaufgabe für die Poissongleichung: Jede hinreichend glatte Lösung des Minimumproblems

$$\int_G \frac{1}{2}(q_x^2 + q_y^2 - 2fq) \, dx \, dy = \min!, \quad q = \psi \quad \text{auf} \quad \partial G, \quad (5.50)$$

genügt nach (5.48) der Euler-Lagrangeschen Gleichung

$$\begin{aligned} -q_{xx} - q_{yy} &= f \quad \text{auf} \quad G, \\ q &= \psi \quad \text{auf} \quad \partial G. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Das ist die erste Randwertaufgabe für die Poissongleichung.

Elastische Membran: Physikalisch entspricht (5.50) dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie für eine Membran $z = q(x, y)$, die in eine Randkurve C eingespannt ist (Abb. 5.18). Dabei entspricht f der Dichte einer äußeren Kraft. Für die Schwerkraft hat man $f(x, y) = -\rho g$ zu wählen (ρ Dichte, g Schwerebeschleunigung).

Die zweite und dritte Randwertaufgabe für die Poissongleichung: Jede hinreichend glatte Lösung des Minimumproblems

$$\int_G (q_x^2 + q_y^2 - 2fq) \, dx \, dy + \int_{\partial G} (aq^2 - 2bq) \, ds \stackrel{!}{=} \min \quad (5.52)$$

genügt der Euler-Lagrangeschen Gleichung

$$\begin{aligned} -q_{xx} - q_{yy} &= f \quad \text{auf} \quad G, & (5.53) \\ \frac{\partial q}{\partial n} + aq &= b \quad \text{auf} \quad \partial G. & (5.54) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet s die Bogenlänge der im mathematisch positiven Sinne orientierten Randkurve, und

$$\frac{\partial q}{\partial n} = n_1 q_x + n_2 q_y$$

bedeutet die äußere Normalenableitung, wobei $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j}$ der äußere Einheitsnormalenvektor ist (Abb. 5.20).

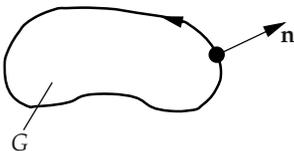


Abb. 5.20

Für $a \equiv 0$ (bzw. $a \neq 0$) bezeichnet man (5.53), (5.54) als zweite (bzw. dritte) Randwertaufgabe für die Poissongleichung.

Die Randbedingung (5.54) tritt im Variationsproblem (5.52) nicht auf. Man nennt sie deshalb eine *natürliche Randbedingung*. Für $a \equiv 0$ können die Funktionen f und b nicht beliebig vorgegeben werden, sondern sie müssen der Lösbarkeitsbedingung

$$\int_G f \, dx \, dy + \int_{\partial G} b \, ds = 0 \quad (5.55)$$

genügen.

Beweisskizze: Es sei q eine Lösung von (5.52).

1. *Schritt:* Wir ersetzen q durch $q + \varepsilon h$ mit dem kleinen reellen Parameter ε und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) := & \int_G [(q_x + \varepsilon h_x)^2 + (q_y + \varepsilon h_y)^2 - 2f(q + \varepsilon h)] \, dx \, dy \\ & + \int_{\partial G} [a(q + \varepsilon h)^2 - 2(q + \varepsilon h)b] \, ds. \end{aligned}$$

Wegen (5.52) besitzt die Funktion φ im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum, d. h., es ist $\varphi'(0) = 0$. Das ergibt

$$\frac{1}{2} \varphi'(0) = \int_G (q_x h_x + q_y h_y - f h) \, dx \, dy + \int_{\partial G} (a q h - b h) \, ds = 0. \quad (5.56)$$

Im Fall $a \equiv 0$ folgt (5.55) aus (5.56), indem man $h \equiv 1$ wählt.

2. *Schritt:* Partielle Integration liefert

$$- \int_G (q_{xx} + q_{yy} + f) h \, dx \, dy + \int_{\partial G} \left(\frac{\partial q}{\partial n} + a q - b \right) h \, ds = 0. \quad (5.57)$$

3. *Schritt:* Wir benutzen nun ein heuristisches Argument, das streng gerechtfertigt werden kann. Die Gleichung (5.57) gilt für alle glatten Funktionen h .

(i) Wir betrachten zunächst alle glatten Funktionen h mit $h = 0$ auf ∂G . Dann verschwindet das Randintegral in (5.57). Wegen der freien Wahl von h erhalten wir

$$q_{xx} + q_{yy} + f = 0 \quad \text{auf } G.$$

(ii) Damit verschwindet das Integral über G in (5.57). Da wir Funktionen h mit beliebigen Randwerten wählen können, erhalten wir

$$\frac{\partial q}{\partial n} + a q - b = 0 \quad \text{auf } \partial G. \quad \square$$

Bemerkung: Im Fall des Variationsproblems (5.50) kann man ähnlich schließen. Wegen $q = \psi$ auf ∂G darf man jetzt jedoch nur Funktionen h mit „ $h = 0$ auf ∂G “ wählen. Der Schluss (i) ergibt (5.51).

Das Prinzip der stationären Wirkung für die schwingende Saite: Die Gleichung $q = q(x, t)$ beschreibe die Auslenkung einer Saite zur Zeit t am Ort x (Abb. 5.21a). Wir setzen $G := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq t_1\}$.

Für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie minus potentielle Energie} \\ &= \frac{1}{2} \rho q_t^2 - \frac{1}{2} k q_x^2 \end{aligned}$$

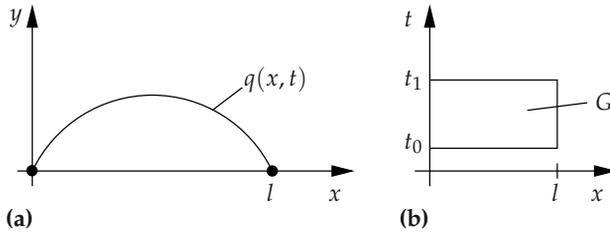


Abb. 5.21

(ρ Dichte, k Materialkonstante) lautet das *Prinzip der stationären Wirkung*

$$\int_G L \, dx \, dt = \text{stationär!},$$

q ist fest vorgegeben auf dem Rand ∂G .

Die zugehörige Euler-Lagrangesche Gleichung $(L_{q_t})_t + (L_{q_x})_x = 0$ ergibt die Gleichung der schwingenden Saite

$$\frac{1}{c^2} q_{tt} - q_{xx} = 0 \quad (5.58)$$

mit $c^2 = k/\rho$.

Satz: Die allgemeinste C^2 -Lösung der Gleichung (5.58) lautet:

$$q(x, t) = a(x - ct) + b(x + ct), \quad (5.59)$$

wobei a und b beliebige C^2 -Funktionen sind. Die Lösung (5.59) entspricht der Superposition zweier Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c von links nach rechts und von rechts nach links ausbreiten.

5.2.3 Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren

Wir erläutern diese Technik an einem wichtigen Beispiel.

Das Eigenwertproblem für die Laplacegleichung: Um das Variationsproblem

$$\int_G (q_x^2 + q_y^2) \, dx \, dy = \min!, \quad q = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G,$$

$$\int_{\partial G} q^2 \, ds = 1, \quad (5.60)$$

zu lösen, wählen wir analog zu 5.1.6 die modifizierte Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} := L + \lambda q^2 = q_x^2 + q_y^2 + \lambda q^2.$$

Die reelle Zahl λ heißt Lagrangescher Multiplikator. Die Euler-Lagrangesche Gleichung für \mathcal{L} lautet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{q_x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_{q_y} - \mathcal{L}_q = 0.$$

Das entspricht dem Eigenwertproblem

$$q_{xx} + q_{yy} = \lambda q \quad \text{auf } G, \quad q = 0 \quad \text{auf } \partial G. \quad (5.61)$$

Man kann zeigen, dass (5.61) eine notwendige Bedingung für eine C^2 -Lösung von (5.60) darstellt. Der Lagrangesche Multiplikator λ wird hier ein Eigenwert.

5.3 Steuerungsprobleme

Zielstellung: Die Steuerungstheorie stellt mathematische Methoden bereit, um technische Prozesse durch die geeignete Wahl von Steuerungsgrößen optimal zu gestalten.

► **BEISPIEL 1:** Kommt ein Raumschiff vom Mond zurück, dann muss man die Bahnkurve so steuern, dass sich der Hitzeschild nur minimal erhitzt. Hierzu konnten keine Experimente durchgeführt werden, sondern die NASA musste auf die Modellgleichungen ihrer Ingenieure und auf die numerischen Berechnungen der Mathematiker vertrauen. Diese Computerrechnungen erwiesen sich als sehr sensibel gegenüber Änderungen der Steuerungsparameter. Tatsächlich gibt es nur einen sehr schmalen Korridor für das Raumschiff. Wird dieser Korridor verfehlt, dann verglüht das Raumschiff, oder es wird wieder in das Weltall zurückgeschleudert. Abb. 5.22 zeigt die Bahnkurve. Unerwarteterweise taucht das Raumschiff zunächst tief ein, um dann nochmals nach oben zu steigen bis eine ungefährliche Kreisbahn erreicht ist, von der aus dann die endgültige Landung erfolgt.¹⁴

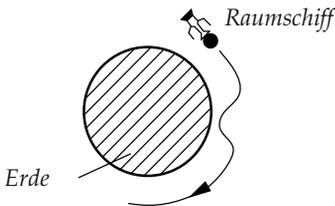


Abb. 5.22

► **BEISPIEL 2:** Der Start einer Rakete soll mit minimalem Treibstoffverbrauch erfolgen, um eine gewisse Höhe zu erreichen. Dieses Problem wird in 11.5.1.2 im Handbuch betrachtet.

► **BEISPIEL 3:** Die Mondfähre musste so gesteuert werden, dass die Landung möglichst sanft erfolgte und möglichst wenig Treibstoff kostete.

► **BEISPIEL 4:** Der Flug einer Sonde zum Mars ist so zu bestimmen, dass der Treibstoffverbrauch minimal ist. Dabei werden die Bahnen auf dem Computer so berechnet, dass Beschleunigungseffekte der anderen Planeten optimal ausgenutzt werden.

Zwei unterschiedliche Strategien in der Steuerungstheorie: Die moderne Steuerungstheorie wurde in den Jahren zwischen 1950 und 1960 geschaffen. Dabei verallgemeinerte man die klassische Variationsrechnung in zwei Richtungen:

Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion S	→	Bellmansche dynamische Optimierung
Hamiltonsche kanonische Gleichungen für die Energiefunktion H	→	Pontrjaginsches Maximumprinzip.

¹⁴Die Behandlung dieses Problems mit Hilfe des Pontrjaginschen Maximumprinzips findet man in [Zeidler 1984, Vol. III, Abschnitt 48.10].

5.3.1 Bellmansche dynamische Optimierung

Das Grundproblem: Wir betrachten das Minimumproblem

$$F(z(t_1), t_1) = \min! \quad (5.62)$$

Hinzu kommen die folgenden Nebenbedingungen.

(i) *Steuerungsgleichung für den Zustand z :*

$$z'(t) = f(z(t), u(t), t).$$

(ii) *Anfangsbedingung für den Zustand:*

$$z(t_0) = a.$$

(iii) *Endbedingung für den Zustand:*

$$t_1 \in \mathcal{T}, \quad z(t_1) \in \mathcal{Z}.$$

(iv) *Steuerungsbeschränkungen*

$$u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{auf} \quad [t_0, t_1].$$

Der Parameter t entspricht der Zeit. Gesucht werden die Endzeit t_1 sowie

$$\text{eine Zustandskurve } z = z(t) \text{ und eine optimale Steuerung } u = u(t).$$

Dabei ist $z = (z_1, \dots, z_N)$ sowie $u = (u_1, \dots, u_M)$. Gegeben sind die Anfangszeit t_0 , der Anfangspunkt a , das Zeitintervall \mathcal{T} und die Mengen $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^N$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^M$.

Zulässige Paare: Ein Paar von Funktionen

$$z = z(t), \quad u = u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

heißt genau dann zulässig, wenn diese Funktionen bis auf endlich viele Sprünge stetig sind und den Nebenbedingungen (i) bis (iv) genügen. Die Menge aller dieser zulässigen Paare wird mit $Z(t_0, a)$ bezeichnet.

Die Bellmansche Wirkungsfunktion S : Wir definieren

$$S(t_0, a) := \inf_{(z, u) \in Z(t_0, a)} F(z(t_1), t_1),$$

d. h., wir bilden das Infimum über alle zulässigen Paare. Im folgenden wird das Verhalten der Funktion S studiert, wenn die Anfangsbedingungen (t_0, a) variieren.

Hauptsatz (notwendige Bedingung): Es sei (z^*, u^*) eine Lösung des vorgegebenen Steuerungsproblems (5.62). Dann sind die folgenden drei Bedingungen erfüllt.

- (i) Die Funktion $S = S(z(t), t)$ ist auf $[t_0, t_1]$ monoton fallend für alle zulässigen Paare (z, u) .
- (ii) Die Funktion $S = S(z^*(t), t)$ ist konstant auf $[t_0, t_1^*]$.
- (iii) Es ist $S(b, t_1) = F(b, t_1)$ für alle $b \in \mathcal{Z}$, $t_1 \in \mathcal{T}$.

Korollar (hinreichende Bedingung): Kennt man eine Funktion S und ein zulässiges Paar (z^*, u^*) mit (i), (ii), (iii), dann ist (z^*, u^*) eine Lösung des Steuerungsproblems (5.62).

Die Gleichung von Hamilton-Jacobi-Bellman: Wir nehmen an, dass die Wirkungsfunktion S hinreichend glatt ist. Für jedes zulässige Paar (z, u) gilt dann die Ungleichung

$$S_t(z(t), t) + S_z(z(t), t) f(z(t), u(t), t) \geq 0 \quad (5.63)$$

auf $[t_0, t_1]$. Für eine Lösung des Steuerungsproblems (5.62) ergibt sich in (5.63) überall das Gleichheitszeichen.

5.3.2 Anwendungen

Lineares Steuerungsproblem mit quadratischer Kostenfunktion:

$$\int_{t_0}^{t_1} (x(t)^2 + u(t)^2) dt \stackrel{!}{=} \min., \quad (5.64)$$

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = a. \quad (5.65)$$

Dabei sind A und B reelle Zahlen.

Satz: Ist die Funktion w eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

$$w'(t) = -2Aw(t) + B^2w(t)^2 - 1$$

auf $[t_0, t_1]$ mit $w(t_1) = 0$, dann erhält man die Lösung $x = x(t)$ des Steuerungsproblems, indem man die Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t) + B(-w(t)Bx(t)), \quad x(t_0) = a \quad (5.66)$$

löst. Die optimale Steuerung $u = u(t)$ ergibt sich dann aus

$$u(t) = -w(t)Bx(t). \quad (5.67)$$

Feedback control: Die Gleichung (5.67) beschreibt eine Rückkopplung zwischen dem Zustand $x(t)$ und der optimalen Steuerung $u(t)$ (feedback control). Derartige optimale Steuerungen lassen sich in der Technik besonders günstig realisieren und werden auch in biologischen Systemen häufig angetroffen. Die Gleichung (5.66) ergibt sich, indem man die Rückkopplungsbeziehung (5.67) in die Steuerungsgleichung (5.65) einsetzt.

Beweis: 1. Schritt: Reduktionstrick. Wir führen durch

$$y'(t) = x(t)^2 + u(t)^2, \quad y(t_0) = 0$$

eine neue Funktion $y(\cdot)$ ein. Dann entsteht das äquivalente Problem

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \min!, \\ y'(t) &= x(t)^2 + u(t)^2, \quad y(t_0) = 0, \\ x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = a. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir $z := (x, y)$.

2. *Schritt:* Für die Bellmansche Wirkungsfunktion S machen wir den Ansatz

$$S(x, y, t) := w(t)x^2 + y.$$

3. *Schritt:* Wir prüfen die Voraussetzungen des Korollars in 5.3.1 nach.

(i) Ist $w = w(t)$ eine Lösung der Riccatischen Gleichung und genügen $x = x(t)$, $u = u(t)$ der Steuerungsgleichung (5.65), dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{dS(x(t), y(t), t)}{dt} &= w'(t)x(t)^2 + 2w(t)x(t)x'(t) + y'(t) \\ &= (u(t) + w(t)Bx(t))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $S = S(x(t), y(t), t)$ monoton fallend bezüglich der Zeit t .

(ii) Ist die Rückkopplungsbedingung (5.67) erfüllt, dann steht in (i) das Gleichheitszeichen, d. h., $S(x(t), y(t), t) = \text{const}$.

(iii) Aus $w(t_1) = 0$ folgt $S(x(t_1), y(t_1), t_1) = y(t_1)$. □

5.3.3 Das Pontrjaginsche Maximumprinzip

Das Steuerungsproblem: Wir betrachten das Minimumproblem

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), u(t), t) dt = \min!} \quad (5.68)$$

Hinzu kommen die folgenden Nebenbedingungen:

(i) *Steuerungsgleichung für die Bahnkurve q :*

$$q'(t) = f(q(t), u(t), t).$$

(ii) *Anfangsbedingung für die Bahnkurve q :*

$$q(t_0) = a.$$

(iii) *Bedingung für die Bahnkurve q zur Endzeit:*

$$h(q(t_1), t_1) = 0.$$

(iv) *Steuerungsbeschränkung:*

$$u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{für alle Zeiten } t \in [t_0, t_1].$$

Kommentar: Zur Konkurrenz sind alle endlichen Zeitintervalle $[t_0, t_1]$ zugelassen. Die Steuerungen $u = u(t)$ sollen bis auf endlich viele Sprünge stetig sein. Ferner sollen die Bahnkurven stetig sein und bis auf endlich viele Sprünge stetige erste Zeitableitungen besitzen. Wir setzen

$$q = (q_1, \dots, q_N), \quad u = (u_1, \dots, u_M), \quad f = (f_1, \dots, f_N), \quad h = (h_1, \dots, h_N).$$

Gegeben sind die Anfangszeit t_0 , der Anfangspunkt $a \in \mathbb{R}^N$ und die Steuerungsmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^M$. Ferner sollen die gegebenen Funktionen L , f und h vom Typ C^1 sein.

Die verallgemeinerte Hamiltonfunktion \mathcal{H} : Wir definieren

$$\mathcal{H}(q, u, p, t, \lambda) := \sum_{j=1}^N p_j f_j(q, u, t) - \lambda L(q, u, t).$$

Hauptsatz: Ist q, u, t_1 eine Lösung des vorgelegten Steuerungsproblems (5.68), dann gibt es eine Zahl $\lambda = 1$ oder $\lambda = 0$, einen Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^N$ und stetige Funktionen $p_j = p_j(t)$ auf $[t_0, t_1]$ so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) *Pontrjaginsches Maximumprinzip:*

$$\mathcal{H}(q(t), u(t), p(t), t, \lambda) = \max_{w \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(q(t), w, p(t), t, \lambda).$$

(b) *Verallgemeinerte kanonische Gleichungen:*¹⁵

$$p'_j = -\mathcal{H}_{q_j}, \quad q'_j = \mathcal{H}_{p_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

(c) *Bedingung zur Endzeit:*¹⁶

$$p(t_1) = -h_q(q(t_1), t_1)\alpha.$$

Es ist entweder $\lambda = 1$ oder man hat $\lambda = 0$ und $\alpha \neq 0$. Im Fall $h \equiv 0$ gilt $\lambda = 1$.

Korollar: Setzen wir

$$p_0(t) := \mathcal{H}(q(t), u(t), p(t), t, \lambda)$$

in den Stetigkeitspunkten t der rechten Seite, dann lässt sich p_0 zu einer stetigen Funktion auf $[t_0, t_1]$ fortsetzen. Ferner gilt¹⁷

$$p'_0 = \mathcal{H}_t \tag{5.69}$$

und

$$p_0(t_1) = h_t(q(t_1), t_1)\alpha.$$

Die Gleichungen (a), (b) und (5.69) gelten für alle Zeitpunkte t auf $[t_0, t_1]$, in denen die optimale Steuerung $u = u(t)$ stetig ist.

5.3.4 Anwendungen

Die optimale Steuerung eines idealisierten Autos: Ein Wagen W der Masse $m = 1$ sei zur Anfangszeit $t_0 = 0$ im Punkt $x = -b$ in Ruhe. Der Wagen bewege sich auf der x -Achse unter dem Einfluss der Motorkraft $u = u(t)$. Gesucht wird eine Bewegung $x = x(t)$, so dass W in der kürzest möglichen Zeit t_1 den Punkt $x = b$ erreicht und dort zum Stehen kommt (Abb. 5.23). Wichtig dabei ist, dass die Motorkraft der Einschränkung $|u| \leq 1$ unterliegen soll.

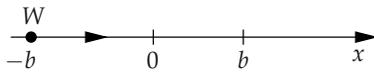


Abb. 5.23

¹⁵Das bedeutet

$$p'_j(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}(Q), \quad q'_j(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}(Q)$$

mit $Q := (q(t), u(t), p(t), \lambda)$.

¹⁶Das bedeutet $p_k(t_1) = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial h_j}{\partial q_k}(q(t_1), t_1)\alpha_j$.

¹⁷Das bedeutet $p'_0(t) = \mathcal{H}_t(q(t), u(t), p(t), \lambda)$.

Mathematische Formulierung:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \stackrel{!}{=} \min., \quad x''(t) = u(t), \quad |u| \leq 1,$$

$$x(0) = -b, \quad x'(0) = 0, \quad x(t_1) = b, \quad x'(t_1) = 0,$$

Bang-bang control: Wir werden zeigen, dass die optimale Steuerung einem hau-ruck Verfahren entspricht. Man benutze die maximale Motorkraft $u = 1$ bis zum Erreichen der halben Strecke $x = 0$ und bremse dann mit $u = -1$ maximal.

Beweis mit Hilfe des Pontrjaginschen Maximumprinzips: Wir setzen $q_1 := x$, $q_2 := x'$. Das ergibt

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \stackrel{!}{=} \min., \quad |u(t)| \leq 1,$$

$$q_1' = q_2, \quad q_2' = u,$$

$$q_1(0) = -b, \quad q_2(0) = 0, \quad q_1(t_1) - b = 0, \quad q_2(t_1) = 0.$$

Nach 5.3.3 lautet die verallgemeinerte Hamiltonsche Funktion:

$$\mathcal{H} := p_1 q_2 + p_2 u - \lambda.$$

Es sei $q = q(t)$ und $u = u(t)$ eine Lösung. Wir setzen

$$p_0(t) := p_1(t)q_2(t) + p_2(t)u(t) - \lambda.$$

Nach 5.3.3 gilt:

$$(i) \quad p_0(t) = \max_{|w| \leq 1} (p_1(t)q_2(t) + p_2(t)w - \lambda).$$

$$(ii) \quad p_1'(t) = -\mathcal{H}_{q_1} = 0, \quad p_1(t_1) = -\alpha_1.$$

$$(iii) \quad p_2'(t) = -\mathcal{H}_{q_2} = -p_1(t), \quad p_2(t_1) = -\alpha_2.$$

$$(iv) \quad p_0'(t) = \mathcal{H}_t = 0, \quad p_0(t_1) = 0.$$

Aus (ii) bis (iv) folgt $p_0(t) = 0$, $p_1(t) = -\alpha_1$, $p_2(t) = \alpha_1(t - t_1) - \alpha_2$.

Fall 1: Es sei $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dann gilt $\lambda = 1$. Das widerspricht jedoch (i) mit $p_0(t) = p_1(t) = p_2(t) = 0$. Deshalb kann dieser Fall nicht vorliegen.

Fall 2: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Dann hat man $p_2 \neq 0$. Aus (i) folgt

$$p_2(t)u(t) = \max_{|w| \leq 1} p_2(t)w.$$

Das ergibt

$$u(t) = 1 \quad \text{für } p_2(t) > 0, \quad u(t) = -1 \quad \text{für } p_2(t) < 0.$$

Da p_2 eine lineare Funktion ist, kann diese nur einmal das Vorzeichen wechseln. Das geschehe zum Zeitpunkt t_* . Da zur Zeit t_1 ein Bremsvorgang vorliegen muss, erhalten wir

$$u(t) = 1 \quad \text{für } 0 \leq t < t_*, \quad u(t) = -1 \quad \text{für } t_* < t \leq t_1.$$

Aus der Bewegungsgleichung $x''(t) = u(t)$ ergibt sich

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 - b & \text{für } 0 \leq t < t_*, \\ -\frac{1}{2}(t - t_1)^2 + b & \text{für } t_* \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Zur Umschaltzeit t_* müssen beide Positionen und Geschwindigkeiten übereinstimmen. Daraus folgt

$$x'(t_*) = t_* = t_1 - t_*,$$

also $t_* = t_1/2$. Ferner erhalten wir aus

$$x(t_*) = \frac{t_*^2}{8} - b = -\frac{t_1^2}{8} + b$$

die Beziehung $x(t_*) = 0$. Das bedeutet, es muss umgeschaltet werden, wenn sich der Wagen im Ursprung $x = 0$ befindet. \square

5.4 Extremwertaufgaben

5.4.1 Lokale Minimumprobleme

Gegeben sei eine Funktion

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R},$$

die auf einer Umgebung U des Punktes x^* erklärt ist. Es genügt Minimumprobleme zu studieren, weil man jedes Maximumproblem durch Übergang von f zu $-f$ in ein äquivalentes Minimumproblem verwandeln kann. Es sei $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Definition: Die Funktion f besitzt genau dann im Punkt x^* ein *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung V von x^* gibt, so dass gilt:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in V. \quad (5.70)$$

Ist $f(x^*) < f(x)$ für alle $x \in V$ mit $x \neq x^*$, dann sprechen wir von einem *strengen lokalen Minimum*.

Notwendige Bedingung: Ist f vom Typ C^1 und besitzt f im Punkt x^* ein lokales Minimum, dann gilt

$$f'(x^*) = 0.$$

Das ist äquivalent¹⁸ zu $\partial_j f(x^*) = 0$, $j = 1, \dots, N$.

Hinreichende Bedingung: Ist f vom Typ C^2 mit $f'(x^*) = 0$, dann besitzt f in x^* ein strenges lokales Minimum, wenn gilt:

(D) Die Matrix $f''(x^*)$ der zweiten partiellen Ableitungen von f im Punkt x^* besitzt nur positive Eigenwerte.

Die Bedingung (D) ist dazu äquivalent, dass alle Hauptunterdeterminanten

$$\det(\partial_j \partial_k f(x^*)), \quad j, k = 1, \dots, M,$$

für $M = 1, \dots, N$ positiv sind.

¹⁸ $\partial_j := \partial/\partial x_j$.

► **BEISPIEL:** Die Funktion $f(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1^3$ besitzt in $x^* = (0, 0)$ ein strenges lokales Minimum.

Beweis: Es ist: $\partial_1 f(x) = x_1 + 3x_1^2$, $\partial_2 f(x) = x_2$, $\partial_1^2 f(0, 0) = \partial_2^2 f(0, 0) = 1$ und $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) = 0$. Daraus folgt

$$\partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0$$

sowie

$$\partial_1^2 f(0, 0) > 0, \quad \begin{vmatrix} \partial_1^2 f(0, 0) & \partial_1 \partial_2 f(0, 0) \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) & \partial_2^2 f(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

5.4.2 Globale Minimumprobleme und Konvexität

Satz: Für eine konvexe Funktion $f : K \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ auf der konvexen Menge K ist jedes lokale Minimum ein globales Minimum.

Ist f streng konvex, dann besitzt f höchstens ein globales Minimum.

Konvexitätskriterium: Eine C^2 -Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen konvexen Menge U ist streng konvex, wenn die Matrix $f''(x)$ in jedem Punkt x nur positive Eigenwerte besitzt.

► **BEISPIEL:** Die Funktion $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j \ln x_j$ ist *streng konvex* auf der Menge $U := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_j > 0 \text{ für alle } j\}$. Folglich ist $-f$ streng konkav auf U . Von diesem Typ ist die Entropiefunktion (vgl. 5.4.6).

Beweis: Alle Determinanten

$$\det(\partial_j \partial_k f(x)) = \begin{vmatrix} x_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & x_M^{-1} \end{vmatrix} = x_1^{-1} x_2^{-1} \dots x_M^{-1}$$

mit $M = 1, \dots, N$ sind positiv für $x \in U$.

Stetigkeitskriterium: Jede konvexe Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen konvexen Menge U ist stetig.

Existenzsatz: Ist $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und gilt $f(x) \rightarrow +\infty$ für $|x| \rightarrow +\infty$, dann besitzt die Funktion f ein globales Minimum.

5.4.3 Anwendungen auf die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß

Gegeben seien die N Messpunkte

$$\boxed{x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad \dots; \quad x_N, y_N.}$$

Die Parameter a_1, \dots, a_M einer gegebenen Kurvenschar

$$\boxed{y = f(x; a_1, \dots, a_M)}$$